

1. Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Suponha que P satisfaz

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- Calcule os valores de a , b e c .
- Usando a propriedade acima, calcule o valor da soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

em função do valor $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

- Como $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, então:

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) = \\ &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1) = \\ &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c). \text{ (6 pontos)} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c) - ax^3 - bx^2 - cx = \\ &= 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c). \end{aligned}$$

Como por hipótese $P(x+1) - P(x) = x^2$ temos que ter **(2 pontos)**

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Portanto $P(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x$ **(2 pontos)**.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $n^2 = P(n+1) - P(n)$, e assim

$$\begin{aligned} n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 &= \\ &= P(n+1) - P(n) + P(n) - P(n-1) + \dots + P(3) - P(2) + P(2) - P(1) = \\ &= P(n+1) - P(1) = \text{ (6 pontos)} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}. \text{ (4 pontos)} \end{aligned}$$

2. Mostre que os números $49, 4489, 444889, 44448889, \dots$, obtidos colocando-se 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.

Solução:

Seja algum número x informado no enunciado. No número x temos n dígitos 4 e $n - 1$ dígitos 8 e apenas um dígito 9 no final: $444 \dots 4888 \dots 89$. Quebrando este número x temos

$$\begin{aligned} x &= 444 \dots 4 \times 10^n + 888 \dots 8 \times 10 + 9 = 4 \times 111 \dots 1 \times 10^n + 8 \times 111 \dots 1 \times 10 + 9 = \\ &= 4 \times \frac{999 \dots 9}{9} \times 10^n + 8 \times \frac{999 \dots 9}{9} \times 10 + 9 = 4 \times \frac{10^n - 1}{9} \times 10^n + 8 \times \frac{10^{n-1} - 1}{9} \times 10 + 9 \\ &\text{(8 pontos).} \end{aligned}$$

Continuando na conta acima

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \times 10^n - 4}{9} \times 10^n + \frac{8 \times 10^{n-1} - 8}{9} \times 10 + 9 = \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 80 + 81}{9} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \quad \text{(12 pontos).} \end{aligned}$$

3. A desigualdade de *Cauchy-Schwarz* diz que se temos dois conjuntos de números reais com mesma quantidade de elementos, $\{a_1, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ então vale

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

e a igualdade é obtida se, e somente se, existir um número real λ tal que

$$b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, \dots, \text{ e } b_n = \lambda a_n,$$

ou

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \dots, \text{ e } a_n = \lambda b_n.$$

- Prove o resultado acima para o caso $n = 2$.
- Sendo α e β valores de ângulos em graus com $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ mostre que

$$\left(\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta} \right) \cos(\alpha - \beta) \geq 1,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha = \beta$.

Solução:

- Para $n = 2$, desenvolvendo a desigualdade de Cauchy-Schwarz, chegamos em

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &\geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1b_1)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_2)^2 &\geq (a_1b_1)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + (a_2b_2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1b_2)^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + (a_2b_1)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 &\geq 0 \text{ (7 pontos)} \end{aligned}$$

A igualdade da primeira linha acima é válida se, e somente se, a igualdade da última linha acima for zero. Assim

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &= (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1b_2 &= a_2b_1. \end{aligned}$$

Caso $b_1 = b_2 = 0$ temos $b_1 = \lambda a_1$ e $b_2 = \lambda a_2$ tomando $\lambda = 0$. Sem perda de generalidade, se $b_1 \neq 0$ então tomando $\lambda = \frac{a_1}{b_1}$ temos

$$a_1 = \lambda b_1 \text{ e } a_2 = \lambda b_2 \text{ (3 pontos).}$$

- Definindo

$$a_1 = \sqrt{\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta}}, \quad b_1 = \sqrt{\cos \alpha \cos \beta}, \quad b_2 = \sqrt{\sin \alpha \sin \beta},$$

a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $n = 2$ com os termos acima nos dá:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &\geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta} \right) (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) &\geq \left(\sqrt{\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta}} \sqrt{\cos \alpha \cos \beta} + \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta}} \sqrt{\sin \alpha \sin \beta} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta} \right) \cos(\alpha - \beta) &\geq (\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta)^2 = 1 \quad \textbf{(8 pontos)}.\end{aligned}$$

Da mesma forma que no item i., teremos a igualdade na equação acima se, e somente se,

$$\sqrt{\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta}} \sqrt{\sin \alpha \sin \beta} = \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\sin \beta}} \sqrt{\cos \alpha \cos \beta} \Leftrightarrow \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \sin(\beta - \alpha) = 0.$$

Como $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ temos $-90^\circ < \beta - \alpha < 90^\circ$. Logo a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ **(2 pontos)**.

4. 2013 é o primeiro ano desde a idade Média que é formado por quatro dígitos consecutivos. Quantos anos deste tipo estão ainda por vir após 2013 e antes do ano 10.000?

Solução:

Com os dígitos consecutivos 0, 1, 2 e 3 temos

2031; 2103; 2130; 2301; 2310; 3012; 3021; 3102; 3120; 3201; 3210

que são 11 possibilidades **(5 pontos)**.

Com os dígitos consecutivos 1, 2, 3 e 4 temos para a 1ª casa (casa do milhar) 3 possibilidades (só não pode o dígito 1, pois não pode ser número menor que 2013). A partir daí tenho 3! possibilidades de preencher as casas restantes. Então teremos para este caso $3 \times 3! = 18$ possibilidades **(5 pontos)**.

Com os conjuntos de dígitos (2; 3; 4; 5), (3; 4; 5; 6), (4; 5; 6; 7), (5; 6; 7; 8) e (6; 7; 8; 9), qualquer combinação destes números me dá um valor maior que 2013, logo teremos mais $5 \times 4! = 120$ possibilidades **(5 pontos)**.

Calculando o total, temos $11 + 18 + 120 = 149$ possibilidades **(5 pontos)**.

5. Encontre todas as soluções (x, y, z, t) com $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ do sistema abaixo

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

Solução:

O sistema em questão é equivalente à seguinte equação em números complexos

$$(x + i\sqrt{2}y)(z + i\sqrt{2}t) = 3 + i\sqrt{2} \quad (8 \text{ pontos})$$

Calculando o módulo de números complexos na expressão acima obtemos

$$(x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11.$$

Portanto, como estamos considerando $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ temos

$$x^2 + 2y^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 + 2t^2 = 1,$$

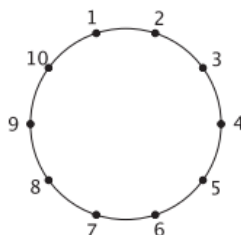
pois 11 é primo **(8 pontos)**. Para a primeira equação obtemos $x = \pm 1$ e $y = 0$ logo, neste caso, ficamos com duas soluções

$$(1, 0, 3, 1) \quad \text{e} \quad (-1, 0, -3, -1) \quad (2 \text{ pontos}).$$

Para a segunda equação temos $z = \pm 1$, $t = 0$ logo, neste caso, ficamos com duas soluções

$$(3, 1, 1, 0) \quad \text{e} \quad (-3, -1, -1, 0) \quad (2 \text{ pontos}).$$

6. Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição



- Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?
- Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um quadrilátero convexo no qual exatamente dois dos ângulos internos sejam retos?
- Se forem retiradas cinco bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um pentágono convexo que tenha o centro da circunferência em seu interior? **Obs.:** se o centro da circunferência pertence ao lado do pentágono, então ele não está no interior do pentágono.

Solução:

- i. Há $\binom{10}{3}$ maneiras de se retirar 3 bolas da circunferência. Para que formem triângulos isósceles, cada vértice da circunferência consegue formar 4 triângulos isósceles (tomando os vértices de cada lado simétricos para formar a base do triângulo isósceles). Assim, o total de triângulos simétricos é 10 (vértices) $\times$ 4 (isósceles por vértice) $= 40$ possibilidades. A probabilidade então é

$$\frac{40}{\binom{10}{3}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \text{ (6 pontos).}$$

- ii. Há $\binom{10}{4}$ maneiras de se retirar 4 bolas da circunferência. Para que um ângulo do quadrilátero convexo seja de 90° , a diagonal do quadrilátero deve ser diâmetro da circunferência (**3 pontos**). Podemos ter 5 diagonais diferentes ao escolher bolas no extremo oposto da circunferência. Ao escolher a diagonal, podemos escolher de um lado 4 bolas para formar o 1º vértice de 90° , porém ao escolher do outro lado, teremos de ter o cuidado para não escolher a bola diametralmente oposta a esta última, senão o quadrilátero terá 4 ângulos retos (será um retângulo), não exatamente 2 ângulos retos como pede o enunciado. Ou seja, teremos três possibilidades para escolha da bola do último vértice. Assim, total de quadriláteros com exatamente 2 ângulos retos

é $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades (**3 pontos**). A probabilidade então é

$$\frac{60}{\binom{10}{4}} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7} \text{ (2 pontos).}$$

iii. Há $\binom{10}{5}$ maneiras de se retirar 5 bolas da circunferência. Para que um pentágono com vértices nas bolas da circunferência mostrada, há duas maneiras de se conseguir um pentágono com o centro da circunferência fora do interior do pentágono.

a) Pentágono formado por 5 vértices consecutivos $\Rightarrow$ 10 possibilidades.

b) Pentágono como um dos lados sobre um diâmetro da circunferência (neste caso o centro da circunferência estaria sobre um dos lados, mas não seria interno). Depois de escolhido o diâmetro (5 possibilidades), posso de escolher mais 3 vértices (de 4 restantes de cada lado) para formar um pentágono $\Rightarrow 5 \times 2 \times \binom{4}{3} = 5 \times 2 \times 4 = 40$ possibilidades.

Logo o total de possibilidades do centro não ser interno é $10 + 40 = 50$. A probabilidade então é

$$1 - \frac{50}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{50}{252} = \frac{202}{252} = \frac{101}{126} \text{ (6 pontos).}$$