POTI
Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Lista de Exercícios
Equações e Sistemas de Equações

Nível 2 - Polo UFPR
Álgebra
Aula 2 (13/04/19)

1 Questões Propostas

Problema 1.1. *Mostre que* $x^2 - y^2 = a^3$ *tem solução inteira* (x, y) *dado que* $a \in \mathbb{Z}$

Problema 1.2. *Prove que se os coeficientes de uma equação quadrática* $ax^2 + bx + c$ *são inteiros ímpares, então as raízes da equação não podem ser números racionais.*

Problema 1.3. *(EUA - Adaptado) Determine todas as triplas ordenadas distintas* (x, y, z) *de números inteiros satisfazendo o sistema de equações:*

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ xy + 4yz + 2xz = 22 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Problema 1.4. *(URSS) Encontre todas as soluções inteiras* (x, y, z, t) *do sistema:*

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

Problema 1.5. *Resolva o sistema de equações:*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 2 \\ x - 3y^2 + z = 0 \end{cases}$$

Problema 1.6. *Mostre que o sistema*

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y \\ y + \frac{1}{y} = z \\ z + \frac{1}{z} = x \end{cases}$$

não possui soluções reais (x, y, z).

Problema 1.7. *Mostre que a única solução do sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad\vdots \qquad = \vdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

é $x_1 = x_2 = \ldots = x_{99} = x_{100}$.

Problema 1.8. *(EUA) Quatro inteiros positivos a, b, c, d têm produto igual a $8!$ e satisfazem*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ab & + & a & + & b & = & 524 \\ bc & + & b & + & c & = & 146 \\ cd & + & c & + & d & = & 104 \end{array}\right. .$$

Quanto vale $a - d$?

Problema 1.9. *(Iberoamericana) Ache todas a triplas de números reais (x, y, z) tais que*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -1 \\ x^2 & - & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ -x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & -1 \end{array}\right. .$$

Problema 1.10. *(OCM) Determine $a + b + c + d$, se*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6a & + & 2b & & & & & = & 3840 \\ & & & & 6c & + & 3d & = & 4410 \\ a & + & 3b & & & + & 2d & = & 3080 \end{array}\right. .$$

Problema 1.11. *(OBM) As letras O, B, M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?*