Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 2

# Lógica II

Quando lemos um problema de matemática imediatamente podemos ver que ele está dividido em duas partes: *as informações* e as *perguntas*. Você vai aprender, durante sua jornada como olímpico, que para resolver um problema de matemática você deve conhecer várias técnicas. Uma das mais básicas é saber organizar as informações que são oferecidas pelos problemas.

**Problema 1.** (OCM 1990) A pesquisa realizada com as crianças de um conjunto habitacional, que apurou as preferências em relação aos três programas de televisão: *Alegre Amanhã* (designado por $A$), *Brincolândia* (designado por $B$) e *Criança Feliz* (designado por $C$) indicou os seguintes resultados:

| Prog | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ e $B$ | $A$ e $C$ | $B$ e $C$ | $A$,$B$ e $C$ | Nenhum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pref | 100 | 150 | 200 | 20 | 30 | 40 | 10 | 130 |

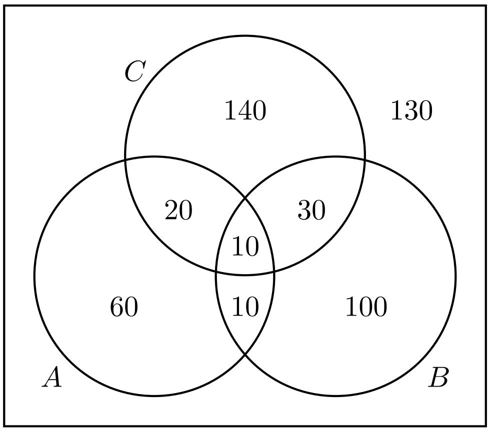
Pergunta-se:

(a) Quantas crianças foram consultadas?

(b) Quantas crianças apreciam apenas um programa?

(c) Quantas crianças apreciam mais de um programa?

**Solução.** Você deve ter percebido que existe um grande número de informações dadas. De certa forma, essas informações já estão organizadas em uma tabela. Mas para resolver o problema vamos mudar nossa representação, nosso *ponto de vista*. Vamos construir um diagrama de Venn, o popular diagrama de *conjuntos*:




Podemos agora responder às perguntas facilmente:

a) Foram consultadas $10 + 10 + 20 + 30 + 60 + 100 + 140 + 130 = 500$ crianças.

b) $60 + 100 + 140 = 300$ crianças gostam de apenas um programa.

c) $10 + 10 + 20 + 30 = 70$ crianças apreciam mais de um programa. $\square$

O próximo exemplo usa apenas o raciocínio lógico.

**Problema 2.** (Torneio das Cidades) Carlixtos possui seis moedas, sendo uma delas falsa. Nós não sabemos o peso de uma moeda falsa e nem o peso de uma moeda verdadeira, sabemos apenas que as moedas verdadeiras possuem todas o mesmo peso e que o peso da moeda falsa é diferente. Dispomos de uma balança de dois pratos. Mostre como é possível descobrir a moeda falsa usando apenas três pesagens.

**Solução.** Sejam $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ e $F$ as moedas. Primeiramente fazemos a pesagem $(AB) <> (CD)$ (que significa $A$ e $B$ em um prato e $C$ e $D$ em outro). Se $(AB) = (CD)$ (ou seja, se equilibrar), então ou $E$ ou $F$ é falsa. Neste caso fazemos a pesagem $(A) <> (E)$. Se equilibrar, $F$ é falsa. Caso contrário, $E$ é falsa.

Agora, se não houve equilíbrio em $(AB) <> (CD)$, então $E$ e $F$ são verdadeiras. Fazemos então a pesagem $(AB) <> (EF)$. Se equilibrar, ou $C$ ou $D$ é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem $(A) <> (C)$. Se equilibrar, $D$ é falsa. Caso contrário, $C$ é falsa.

Para finalizar, se $(AB) \neq (EF)$, então ou $A$ ou $B$ é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem $(A) <> (C)$. Se equilibrar $B$ é falsa. Caso contrário, $A$ é falsa.

Continuando o processo de desenvolvimento do raciocínio, vamos resolver a seguir duas questões relacionadas com a seguinte pergunta: *Será possível?*. Ao longo do ano você verá como essa pergunta é frequente na olimpíada. Na verdade, ela é recorrente em toda a matemática. Aqui também vamos desenvolver uma das técnicas mais poderosas usadas para resolver problemas de matemática. Que é a idéia de **prova por absurdo**.

**Problema 3.** (Ivan Borsenco) É possível cortar um retângulo $5 \times 6$ em oito retângulos distintos com dimensões inteiras e lados paralelos aos lados do retângulo maior?

**Solução.** Vamos assumir que todos os retângulos são distintos. Os retângulos de menor área possível são:

| | |
|---|---|
| Área 1: $1 \times 1$ | Área 4: $2 \times 2$ e $1 \times 4$ |
| Área 2: $1 \times 2$ | Área 5: $1 \times 5$ |
| Área 3: $1 \times 3$ | Área 6: $2 \times 3$ e $1 \times 6$ |

Note que a menor área coberta por oito retângulos distintos deve ser pelo menos $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 > 30$. Logo é impossível obter 8 retângulos distintos.

É importante tomar cuidado com esse tipo de enunciado pois, em alguns casos, é possível.

**Problema 4.** (Torneio das Cidades 2001) Podemos trocar um inteiro positivo $n$ pelo produto $a \times b$ onde $a$ e $b$ são inteiros positivos tais que $a + b = n$. Podemos obter 2001 a partir de 22, por uma seqüência de trocas?

**Solução.** Note que $2001 = 3 \times 667$ pode ser obtido de $3 + 667 = 670$, que pode ser obtido de $67 + 10 = 77$ que pode ser obtido de $7 + 11 = 18$. Por outro, todo número $n - 1 = (n - 1) \times 1$ pode ser obtido de $(n - 1) + 1 = n$. Assim, basta seguir a seqüência abaixo:

$$22 \to 21 \to 20 \to 19 \to 18 \to 77 \to 670 \to 2001.$$

## Problemas Propostos

**Problema 5.** São dadas 4 moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais e não se sabe se ela é mais leve ou mais pesada). Mostre como descobrir a moeda falsa com 2 pesagens em uma balançaa de dois pratos.

**Problema 6.** Mostre que é possível dispor os números de 1 a 16 em sequância de modo que a soma de dois números vizinho seja sempre um número quadrado perfeito.

**Problema 7.** Victor e Maria começam a trabalhar no mesmo dia. Victor trabalha 3 dias seguidos e depois tem um dia de descanso. Maria trabalha 7 dias seguidos e descansa os outros 3. Quantos dias de descanso em comum tiveram os dois durante os 1000 primeiros dias.

**Problema 8.** Como recortar um retângulo $3 \times 13$ em treze retângulos menores de lados inteiros distintos?

**Problema 9.** (Olimpiada de Maio) Num ano que tem 53 sábados, que dia da semana é 12 de maio? Diga todas as possibilidades.

**Problema 10.** Um número é dito *lindo* se é divisível por cada um dos seus dígitos não nulos. Qual é a maior quantidade de números lindos consecutivos que pode existir?

**Problema 11.** (Búlgaria 2005) Ivo escreve todos os inteiros de 1 a 100 (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Iana. Sabe-se que quaisquer duas destas, uma de Ivo e outra de Iana a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Iana. Determine o número de cartas de Iana sabendo que a carta 13 está com Ivo.

**Problema 12.** (Rússia 1999) Mostre que os números de 1 a 15 não podem ser divididos em um grupo $A$ de dois elementos e um grupo $B$ de 13 elementos tais que a soma dos elementos de $B$ seja igual ao produto dos elementos de $A$.

**Problema 13.** (Seletiva Rioplatense 2004) Em cada casa de um tabuleiro $8 \times 8$ escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.
Obs: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

**Problema 14.** Etevaldo pensou em cinco números distintos e escreveu no quadro todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Será que Ovozildo pode descobrir os números que Etevaldo pensou observando apenas os números escritos no quadro?

# Dicas e Soluções

6. Liste todas as possíveis somas cujo resultado é um quadrado perfeito. Observe que a sequência deve ser iniciada por 8 ou 16.

7. Use período 20.

11. (Início da solução) Iana possui pelo menos uma carta, digamos a carta com o número $k$. Se 1 está com Ivo, o produto $1.k = k$ não está com Iana, que é uma contradição. Logo, 1 está com Iana.
Se 12 está com Ivo, a soma $1 + 12 = 13$ não está com Ivo, que também é uma contradição. Logo, 12 está com Iana.
Agora, se as cartas 3 e 4 estiverem com pessoas diferentes o produto $3.4 = 12$ não estará com Iana. Porém, acabamos de ver que 12 está com Iana. Daí, 3 e 4 estão com a mesma pessoa. Se ambas estiverem com Ivo, a soma $1 + 3 = 4$ não está com Ivo, contadição. Logo, 3 e 4 estão com Iana. Conseqüêntimente, 10 e 9 também estão com Iana, pois a soma $10 + 3 = 9 + 4 = 13$ estão com Ivo.

12. Sejam $a$ e $b$ os dois elementos de de $A$. Pela condições do problema podemos montar a seguinte equação:
$$(1 + 2 + \cdots + 15) - a - b = ab$$
$$\Rightarrow 120 = ab + a + b \Rightarrow 121 = (a + 1)(b + 1).$$
Como $a$ e $b$ são inteiros menores que 16, a única solução possível para a equação é $a = b = 10$. Que é um absurdo, já que $a$ e $b$ são elementos distintos.

13. Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ★ | ★ | | | ★ | ★ | |
| | | | | | | | |
| ★ | | | ★ | ★ | | | ★ |
| ★ | | | | | | | ★ |
| | | ★ | | | ★ | | |
| | | ★ | | | ★ | | |
| ★ | | | | | | | ★ |
| ★ | | | ★ | ★ | | | ★ |

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é 20.

14. Sim, é possível. Sejam $a < b < c < d < e$ os números escolhidos por Etevaldo. A soma dos números escritos no quadro é igual ao quadruplo da soma $S = a + b + c + d + e$. Podemos escolher o maior e o menor valor escrito no quadro. Somando estes valores

e multiplicando-o por quatro obtemos $4S - 4c$. Assim, é possível achar o valor de $c$. Note que os três maiores valores escritos por Etevaldo são $e + d > e + c > d + c$. Daí, fazendo $(e + d) + (e + c) - (d + c) = 2e$ é possível achar o valor de $e$. Mais ainda, como conhecemos $e + d$, consequentemente, também achamos $d$. De modo análogo, observando os três menores valores $(a + b < a + c < b + c)$ é possível determinar $a$ e $b$.

# Combinatória 02 - Lógica 2

**Problema 5**. São dadas $4$ moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais e não se sabe se ela é mais leve ou mais pesada). Mostre como descobrir a moeda falsa com $2$ pesagens em uma balança de dois pratos.

**Solução.** Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ as moedas. Primeiramente pesamos $A$ e $B$. Se a balança equilibrar, então ou $C$ ou $D$ são falsas. Neste caso pesamos $A$ e $C$: se equilibrar $D$ é falsa, caso contrário $C$ é falsa. Agora, se a pesagem de $A$ e $B$ não equilibrar a balança então ou $A$ ou $B$ são falsas. Fazemos então a pesagem de $A$ e $C$. Se equilibrar então $B$ é falsa, caso contrário $A$ é falsa.

**Problema 6**. Mostre que é possível dispor os números de $1$ a $16$ em sequência de modo que a soma de dois números vizinho seja sempre um número quadrado perfeito.

**Solução.** Basta tomar a sequência:

$$8 - 1 - 15 - 10 - 6 - 13 - 12 - 4 - 5 - 11 - 14 - 2 - 7 - 9 - 16$$

**Problema 7**. Victor e Maria começam a trabalhar no mesmo dia. Victor trabalha $3$ dias seguidos e depois tem um dia de descanso. Maria trabalha $7$ dias seguidos e descansa os outros $3$. Quantos dias de descanso em comum tiveram os dois durante os $1000$ primeiros dias.

**Solução.** O primeiro dia de trabalho de Victor é da forma $(3+1)k+1 = 4k+1$ e o primeiro dia de trabalho de Maria é da forma $(7+3)k'+1 = 10k'+1$.

Fazendo $10k'+1 = 4k+1$ temos $5k' = 2k$ e então $k' = 2t$, $k = 5t$ para algum $t$ natural.
Sendo assim $10k'+1 = 4k+1 = 20t+1$.
Isto é, os dias em que os dois começam a trabalhar juntos são da forma $20t+1$.
Temos então um ciclo de $20$ dias.

Nos primeiros $20$ dias Victor descansa nos dias $4$, $8$, $12$, $16$, $20$ e Maria descansa nos dias $8$, $9$, $10$, $18$, $19$ e $20$.
Então há $2$ dias de descanso em comum a cada ciclo de $20$ dias.

Portanto, nos primeiros $1000$ dias há $2 \times \dfrac{1000}{20} = 100$ dias de descanso em comum.

**Problema 8**. Como recortar um retângulo $3 \times 13$ em treze retângulos menores distintos?

**Solução.** A área total é $3 \times 13 = 39$. Vamos pensar nos retângulos distintos de menor área.

Área 1: $1 \times 1$
Área 2: $1 \times 2$
Área 3: $1 \times 3$
Área 4: $2 \times 2$ e $1 \times 4$
Área 5: $1 \times 5$
Área 6: $2 \times 3$ e $1 \times 6$
Área 7: $1 \times 7$
Área 8: $2 \times 4$ e $1 \times 8$

Somando as áreas dos $11$ retângulos de menor área temos uma área de $1+2+3+4+4+5+6+6+7+8+8 = 54 > 39$. Dessa forma, $13$ retângulos distintos sempre terão área total maior que $39$ e não é possivel fazer a divisão desejada.

**Problema 9**. (Olimpiada de Maio) Num ano que tem $53$ sábados, que dia da semana é $12$ de maio? Diga todas as possibilidades.

**Solução.** Veja que $365 = 52 \times 7 + 1$. Logo, o ano tem $52$ semanas e $1$ dia. Para que ocorram $53$ sábados, o dia que sobra - o último dia do ano - deve ser um sábado. Como o último dia do ano é da forma $7k+1$ (k $= 52$), concluimos que todo dia da forma $7k+1$ também será sábado.

Agora note que Janeiro tem $31$ dias, Fevereiro tem $28$, Março tem $31$ e Abril $30$. Dessa forma, como $31 + 28 + 31 + 30 + 12 = 132$, $12$ de maio é o $132^{\underline{o}}$ dia do ano. Como $134 = 7 \times 19 + 1$ o dia $14$ de maio é um sábado e portanto $12$ de maio é uma quinta-feira.

**Problema 10**. Um número é dito $lindo$ se é divisível por cada um dos seus dígitos não nulos. Qual é a maior quantidade de números $lindos$ que pode existir?

**Solução.** Existem infinitos números lindos. Basta considerar os números da forma $222\ldots22$ em que o número de dígitos varia entre os naturais. Esse número será sempre divisível por seu dígito $2$.

**Problema 11**. (Búlgaria $2005$) Ivo escreve todos os inteiros de $1$ a $100$ (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Iana. Sabe-se que para quaisquer duas destas, uma de Ivo e outra de Iana, a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Iana. Determine o número de cartas de Iana sabendo que a carta $13$ está com Ivo.

**Solução.** Iana possui pelo menos uma carta, digamos a carta com o número $k$. Se $1$ está com Ivo, o produto $1 \cdot k = k$ não está com Iana, que é uma contradição.
Logo, $1$ está com Iana.
Se $12$ está com Ivo, a soma $1 + 12 = 13$ não está com Ivo, que também é uma contradição.
Logo, $12$ está com Iana.

Agora, se as cartas $3$ e $4$ estiverem com pessoas diferentes o produto $3 \cdot 4 = 12$ não estará com Iana. Porém, acabamos de ver que $12$ está com Iana. Daí, $3$ e $4$ estão com a mesma pessoa. Se ambas estiverem com Ivo, a soma $1+3=4$ não está com Ivo, contadição. Logo, $3$ e $4$ estão com Iana. Consequêntemente, $10$ e $9$ também estão com Iana, pois a soma $10+3=9+4=13$ estão com Ivo.

Agora, veja que se $r$ está com Iana então $13+r$ não está com Ivo e portanto está com Iana. Do mesmo modo, $(13+r)+13 = 13 \cdot 2 + r$ está com Iana e o mesmo vale para $13 \cdot 3 + r$. De modo geral, se $r$ está com Iana então todos os números da forma $13 \cdot k + r$ estão com Iana. Sendo assim, já vimos que $13k+1, 13k+3, 13k+4, 13k+12$ estão com Iana.

Se $2$ estiver com Ivo então $2+3=5$ está com Iana. Dai $5 \cdot 2 = 10$ está com Ivo, do mesmo modo $10 \cdot 3 = 30$ e consequentemente $30 \cdot 3 = 90$ está com Ivo. Mas $90 = 13 \cdot 6 + 12$ e como vimos esse número está com Iana, contradição. Logo, $2$ está com Iana e consequentemente $13k+2$ está com Iana.

Veja que $5 \cdot 6 = 30 = 13 \cdot 2 + 4$ está com Iana. Logo, $5$ e $6$ devem estar com a mesma pessoa. Mas se $5$ está com Ivo então $1+5=6$ não pode estar com Ivo, contradição. Logo, $5$ e $6$ estão com Iana e portanto $13k+5$ e $13k+6$ estão com Iana.
Analogamente $7 \cdot 8 = 56 = 13 \cdot 4 + 4$ está com Iana e portanto $13k+7$ e $13k+8$ estão com Iana.
O mesmo vale para $9$ e $10$ já que $9 \cdot 10 = 90 = 13 \cdot 6 + 12$.
E, por último, como $6 \cdot 11 = 66 = 13 \cdot 5 + 1$ está com Iana, $11$ e $6$ devem estar com a mesma pessoa e portanto estão com Iana.
Concluimos que Iana está com todos os números que não multiplos de $13$.
Como $13 \cdot 2, \ldots 13 \cdot 7$ não estão com Iana, Ivo tem todos os múltiplos de $13$.
Dessa forma, Iana tem $100 - 7 = 93$ cartas.

**Problema 12**. (Rússia $1999$) Mostre que os números de $1$ a $15$ não podem ser divididos em um grupo $A$ de dois elementos e um grupo $B$ de $13$ elementos tais que a soma dos elementos de $B$ seja igual ao produto dos elementos de $A$.

**Solução.** Suponha que o grupo $A$ tenha os dois números distintos $x$ e $y$. Então a soma dos elementos de $B$ é $1+2+\ldots+15-x-y = 120-x-y$.
Queremos que $120 - x - y = xy \iff 11^2 = 121 = x+y+xy+1 = (x+1)(y+1)$.
As únicas soluções nos naturais são $(x,y) = (10,10), (120,0)$.
Nenhum dos dois pares são possíveis pois $x \neq y$ e $x, y \leq 15$.
Logo, não é possível fazer a divisão desejada.

**Problema 13**. (Seletiva Rioplatense $2004$) Em cada casa de um tabuleiro $8 \times 8$ escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é $1$. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.
Obs: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

**Solução.** Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\star$ | $\star$ | | | $\star$ | $\star$ | |
| | | | | | | | |
| $\star$ | | | $\star$ | $\star$ | | | $\star$ |
| $\star$ | | | | | | | $\star$ |
| | | $\star$ | | | $\star$ | | |
| | | $\star$ | | | $\star$ | | |
| $\star$ | | | | | | | $\star$ |
| $\star$ | | | $\star$ | $\star$ | | | $\star$ |

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é $1$, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é $20$.

**Problema 14**. Etevaldo pensou em cinco números distintos e escreveu no quadro todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Será que Ovozildo pode descobrir os números que Etevaldo pensou observando apenas os números escritos no quadro?

**Solução.** Sim. Suponha que os números sejam $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ com $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.
As somas serão:

$$\begin{aligned} x_1 &= a+b & \qquad x_6 &= b+d \\ x_2 &= a+c & x_7 &= b+e \\ x_3 &= a+d & x_8 &= c+d \\ x_4 &= a+e & x_9 &= c+e \\ x_5 &= b+c & x_{10} &= d+e \end{aligned}$$

Veja que as menores somas são $x_1 \leq x_2$ e as maiores são $x_{10} \geq x_9$.
Portanto, ordenando as $10$ somas em ordem crescente já descobrimos quem são $x_1, x_2, x_9, x_{10}$, basta tomar as duas primeiras e as duas últimas somas.
Além disso, temos que

$$x_1 + \ldots + x_{10} = 4(a+b+c+d+e) = 4(x_1 + x_{10} + c).$$

Assim encontramos $c$.
Usando $c$ e $x_9$ encontramos $e = x_9 - c$ e com $x_{10}$ também podemos encontrar $d = x_{10} - e$.
Usando $x_2$ e $c$ temos $a = x_2 - c$ e analogamente encontramos $b = x_1 - a$.
Isso nos fornece todos os cinco números.