1 Questões Resolvidas

Problema 1.1. *Encontre os inteiros que na divisão por 7 deixam um quociente igual ao resto.*

Resposta: Seja x o inteiro procurado, q o quociente e r o resto da divisão $x \div 7$. Com o Algoritmo da Divisão, escrevemos:

$$x = 7 \cdot q + r$$

Mas como $q = r$, temos $x = 7r + r = 8r$, logo x deve ser múltiplo de 8 (pois r é um número inteiro). Além disso, como o resto necessariamente é menor que 7, então os possíveis valores de r são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e portanto, os valores possíveis de x são $\{8 \cdot 0, 8 \cdot 1, \dots, 8 \cdot 6\}$.

Problema 1.2. *Encontre um número natural n que ao ser dividido por 10 deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.*

Resposta: Note que ao somarmos 1 a n ele deixará resto 10 na divisão por 10, 9 na divisão por 9 e 8 na divisão por 8. Mas igualar o resto ao divisor equivale a zerar o resto; em outras palavras, $n+1$ é múltiplo de 10, 9 e 8 simultaneamente. Portanto, um dos valores possíveis é $n+1 = 10 \cdot 9 \cdot 8$, o que implica que $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 1 = 720 - 1 = 719$.

Problema 1.3. *Qual o resto que o número 4^{2019} deixa ao ser dividido por 3?*

Resposta: Primeiramente, note que $4 \div 3$ possui resto 1. Do **Teorema dos Restos**, segue que $(4 \cdot 4) \div 3 = 4^2 \div 3$ deixa resto $1 \cdot 1 = 1^2$, $(4^2 \cdot 4) \div 3 = 4^3 \div 3$ tem resto $1^2 \cdot 1 = 1^3$, e assim sucessivamente. Concluímos portanto que $4^{2019} \div 3$ deixa resto $1^{2019} = 1$.

Problema 1.4. *Qual o resto de $n^3 + 2n$ na divisão por 3?*

Resposta: Denote por r o resto de $n \div 3$. Como $2 \div 3$ tem resto 2, segue do **Teorema dos Restos** que $(2 \cdot n) \div 3$ tem resto $2 \cdot r$. Analogamente, $n^3 \div 3$ deixa resto r^3. Então, $(n^3 + 2n) \div 3$ possui resto $r^3 + 2r$. Como os possíveis valores para r são 0, 1 e 2 (lembre-se que estamos dividindo por 3), analisemos cada um dos casos:

- se $r = 0$, o resto será $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$, logo $n^3 + 2n$ é divisível por 3.
- se $r = 1$, o resto será $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, que é múltiplo de 3, logo $n^3 + 2n$ é divisível por 3.
- se $r = 2$, o resto será $2^3 + 2 \cdot 2 = 12$, que é múltiplo de 3, logo $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

Logo, $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para qualquer n.

Problema 1.5. *Sejam m e n naturais tais que $mn+1$ é múltiplo de 24, mostre que $m+n$ também é múltiplo de 24.*

Resposta: Como $m \cdot n + 1$ é múltiplo de 24, então $(m \cdot n + 1) \div 24$ tem resto 0. Como o resto de $1 \div 24$ é 1, e $(m \cdot n) \div 24$ tem resto positivo, a soma dos restos é maior que 0. Logo, $(m \cdot n) \div 24$ deve ter resto 23 (pois assim $(m \cdot n + 1) \div 24$ possuirá resto $23 + 1 = 24$, que é equivalente a deixar resto 0). Sejam r_1 e r_2 os restos de $m \div 3$ e $n \div 3$, respectivamente. Então $(m \cdot n) \div 3$ tem resto $23 = r_1 \cdot r_2$. Mas 23 é primo, logo $r_1 = 1$ e $r_2 = 23$ (ou o contrário). Assim, $(m + n) \div 24$ tem resto $r_1 + r_2 = 24$, logo $m + n$ é múltiplo de 24.

2 Questões Propostas

Problema 2.1. *Encontre um inteiro que deixa resto* 4 *na divisão por* 5 *e resto* 7 *na divisão por* 13.

Dica: Verifique o que acontece com os restos ao somar 6 ao número procurado.

Problema 2.2 (Prova de Seleção)**.** *Qual o menor número inteiro positivo que deixa resto* 1 *ao ser dividido por* 2, 3, 4, 5, 6 *e* 7*?*

Dica: Subtraia 1. Estude a fatoração deste novo número.

Problema 2.3. *Determinar os números que divididos por* 17 *dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.*

Dica: Use a estratégia do exercício 1.1.

Problema 2.4. *Qual o resto que o número* $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ *deixa quando dividido por* 7*?*

Dica: Estude o resto de $1002 \div 7$, $1003 \div 7$ e $1004 \div 7$ (note que utilizando o Teorema dos Restos, é necessário calcular só a primeira divisão). Após, aplique novamente o teorema.

Problema 2.5 (Banco de Questões OBMEP 2018)**.** *Ana multiplica dois números inteiros positivos cuja diferença é* 202*, mas comete um erro e obtém um número* 1000 *unidades menor que o correto. Ao dividir o resultado de Ana pelo menor dos números que deveria multiplicar, o quociente é* 288 *e o resto é* 67*. Quais os dois números que Ana multiplicou?*

Dica: Chame o menor dos números de n e o maior de $n + 202$. Note que o número obtido por Ana foi $n(n + 202) - 1000$. Escreva na forma fatorada pelo Algoritmo da Divisão.

Problema 2.6 (OBMEP 2011)**.** *Qual o resto da divisão de* $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2011 + 21$ *por* 8*?*

Dica: Aplique o Teorema dos Restos.

Problema 2.7 (OBMEP 2013)**.** *Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57, qual é o resto que ele vai encontrar?*

Dica: Escreva o número na forma fatorada pelo Algoritmo da Divisão.

Problema 2.8. *Encontre todos os pares de inteiros positivos* a *e* b *tais que* $79 = ab + 2a + 3b$.

Dica: Some 6 a ambos os lados da igualdade e fatore. Lembre-se que $x(m + n) + y(m + n) = (m + n)(x + y)$.

Problema 2.9. *Prove que, para todo inteiro positivo* n *o número* $n^5 + 5n^3 + 4n$ *é divisível por* 120.

Dica: Use a estratégia do exercício 1.4.

Problema 2.10 (Banco de Questões OBMEP 2014)**.** *Um grupo de rapazes e moças saiu para comer pizza em dois dias consecutivos. No restaurante em que foram, as pizzas são cortadas em doze pedaços iguais. Maria observou que no primeiro dia cada rapaz comeu 7 pedaços, e cada moça 3 pedaços. Já no segundo dia, cada rapaz comeu 6 pedaços e cada moça 2 pedaços. Curiosamente, em ambos os dias eles pediram quatro pizzas que foram totalmente consumidas e depois pediram mais uma, da qual sobraram alguns pedaços (ou seja, foi comido pelo menos um pedaço e sobrou pelo menos um pedaço). Quantos rapazes e moças foram à pizzaria?*

Dica: Escreva o número na forma fatorada pelo Algoritmo da Divisão.