



Estudante: \_\_\_\_\_

Teoria dos Números

Colégio: \_\_\_\_\_

## Simulado 4 - Nível 2 - Divisibilidade

- i) Preencha o cabeçalho acima com atenção.
- ii) Cada questão tem apenas uma letra correta.
- iii) Preencha o gabarito ao lado com as respostas.
- iv) Cada problema vale 2 pontos.
- v) Não é permitido qualquer tipo de consulta.

### Gabarito

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e

**Problema 1.** Ao dividir o número inteiro  $20 + x$  por 11 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo de  $x$ ?

- a) 10                      b) 9                      c) 6                      d) 4                      e) 2

**Problema 2.** Pedro afirma de que exatamente 25% dos seus livros são de ficção científica e  $\frac{1}{9}$  dos seus livros são de comédia. Sabendo que Pedro possui entre 50 e 100 livros, quantos livros ele possui?

- a) 50                      b) 56                      c) 64                      d) 72                      e) 96

**Problema 3.** Quando os números 73, 216 e 227 são divididos por  $b$  os restos são todos iguais. Sabendo que  $b$  é um inteiro maior que 1, qual é o resto quando 108 é dividido por  $b$ ?

- a) 9                      b) 8                      c) 7                      d) 6                      e) 5

**Problema 4.** Se o produto de dois números inteiros for igual a  $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$ , então sobre a soma desses dois números podemos afirmar que

- a) pode ser divisível por 8
- b) pode ser divisível por 5
- c) pode ser divisível por 49
- d) pode ser divisível por 3
- e) não pode ser divisível por algum dos números 8, 5, 49 ou 3

**Problema 5.** Determine quantos conjuntos de números inteiros consecutivos existem, com pelo menos 2 elementos, em que a soma de todos os seus elementos é igual a 100?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) 5

## Respostas e Soluções.

**Problema 1.** Ao dividir o número inteiro  $20 + x$  por 11 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo de  $x$ ?

- a) 10                      b) 9                      c) 6                      d) 4                      e) 2

**Solução para o Problema 1.** Das informações temos  $20 + x = 11q + 7 \Leftrightarrow 13 + x = 11q$ . O menor múltiplo de 11 maior que 13 é  $11 \cdot 2 = 22$ . O menor valor inteiro positivo de  $x$  é  $22 - 13 = 9$ . **(Letra B)**

**Problema 2.** Pedro afirma de que exatamente 25% dos seus livros são de ficção científica e  $\frac{1}{9}$  dos seus livros são de comédia. Sabendo que Pedro possui entre 50 e 100 livros, quantos livros ele possui?

- a) 50                      b) 56                      c) 64                      d) 72                      e) 96

**Solução para o Problema 2.** Sabemos que  $25\% = \frac{1}{4}$  e da informação dos livros de ficção científica concluímos que o número de livros é múltiplo de 4. Da informação de livros de comédia temos que o número de livros é múltiplo de 9. Se a quantidade de livros é um múltiplo comum de 4 e 9 então é múltiplo de  $4 \cdot 9 = 36$  que é o M.M.C. desses números. O único múltiplo de 36 entre 50 e 100 é  $36 \cdot 2 = 72$ . **(Letra D)**

**Problema 3.** Quando os números 73, 216 e 227 são divididos por  $b$  os restos são todos iguais. Sabendo que  $b$  é um inteiro maior que 1, qual é o resto quando 108 é dividido por  $b$ ?

- a) 9                      b) 8                      c) 7                      d) 6                      e) 5

**Solução para o Problema 3.** Se 216 e 227 deixam o mesmo resto  $r$  então  $216 = bq_1 + r$  e  $227 = bq_2 + r$  implicando  $227 - 216 = 11 = b(q_2 - q_1)$  e  $b$  é um divisor de 11. Como 11 é primo e  $b > 1$  temos  $b = 11$ . Veja que  $108 = 11 \cdot 9 + 9$  e 108 deixa resto 9 por 11. **(Letra A)**

**Problema 4.** Se o produto de dois números inteiros for igual a  $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$ , então sobre a soma desses dois números podemos afirmar que

- a) pode ser divisível por 8  
b) pode ser divisível por 5  
c) pode ser divisível por 49  
d) pode ser divisível por 3  
e) não pode ser divisível por algum dos números 8, 5, 49 ou 3

**Solução para o Problema 4.**

Podemos tomar os números  $a = 3$  e  $b = 2^5 \times 3 \times 5 \times 7^3$  que teremos  $a \cdot b = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$  e  $a + b$  divisível por 3. Para o item A veja que os dois números juntos possuem 5 fatores 2, então um deles tem 3 ou mais e o outro tem 2 ou menos fatores 2. Em outras palavras, um dos dois números é múltiplo de  $2^3 = 8$  e o outro não. Portanto, a soma não poderá ser divisível por 8. Os itens B e C estão incorretos por motivos similares. **(Letra D)**

**Problema S.** Determine quantos conjuntos de números inteiros consecutivos existem, com pelo menos 2 elementos, em que a soma de todos os seus elementos é igual a 100?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) 5

**Solução para o Problema S.** Seja  $n$  a quantidade de inteiros consecutivos somados. Separemos em dois casos,  $n$  ímpar e  $n$  par.

Se somarmos  $n = 2k + 1$  números consecutivos podemos escrever a soma  $S$  deles como

$$S = (x - k) + (x - k + 1) + \dots + (x - 1) + x + (x + 1) + \dots + (x + k) = (2k + 1)x$$

Assim,  $S = 100$  tem solução inteira  $x$  quando  $2k + 1$  é um divisor de 100. Os divisores ímpares maiores que 1 de 100 são  $2k + 1 = 5$  e  $2k + 1 = 25$  que nos dão soluções  $x = 20$  e  $x = 4$ .

Se somarmos  $n = 2k$  números inteiros consecutivos podemos escrever a soma  $S$  deles como

$$S = (x - k + 1) + (x - k + 2) + \dots + (x - 1) + x + (x + 1) + \dots + (x + k - 1) + (x + k) = 2kx + k = k(2x + 1)$$

De forma parecida com o caso anterior  $S = 100$  tem solução inteira  $x$  quando  $k$  é um divisor de 100 tal que  $100/k$  é ímpar. Temos  $k = 4 \Leftrightarrow n = 2k = 8$ ,  $k = 20 \Leftrightarrow n = 2k = 40$  e  $k = 100 \Leftrightarrow n = 2k = 200$  que nos dá soluções  $2x + 1 = 25 \Leftrightarrow x = 12$ ,  $2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$  e  $2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ , respectivamente.

São 2 soluções ímpares e 3 soluções pares totalizando  $2 + 3 = 5$  conjuntos de números. **(Letra E)**

