POLINÔMIOS (POTI)

- **Definição**

Uma **função polinomial** ou simplesmente **polinômio**, é toda função definida pela relação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Onde:

$\mathbf{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0}$ são números reais chamados coeficientes, $\mathbf{n} \in IN$ e $\mathbf{x} \in R$ (n^{os} Reais) ou C (n^{os} complexos) é a variável.

GRAU DE UM POLINÔMIO:

Grau de um polinômio é o expoente máximo que ele possui. Se o coeficiente $a_n \neq 0$, então o expoente máximo **n** é dito grau do polinômio e indicamos *gr(P)=n*. Exemplos:

a) $P(x) = 5$ ou $P(x) = 5.x^0$ é um polinômio constante, ou seja, *gr(P)=0*.
b) $P(x) = 3x+5$ é um polinômio do 1º grau, isto é, *gr(P)=1*.
c) $P(x) = 4x^5+7x^4$ é um polinômio do 5º grau, ou seja, *gr(P)=5*.

Obs: Se $P(x) = 0$, não se define o grau do polinômio.

- **Valor numérico**

O valor numérico de um polinômio P(x) para x = a, é o número que se obtém substituindo ***x*** por **a** e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio. Exemplo:

Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, o valor numérico de P(x), para x=2, é:

$P(2) = 2^3 + 2.2^2 + 2 – 4 \Rightarrow P(2) = 14$

Observação: Se P(a) =0, o número **a é** chamado de **raiz** ou **zero** de P(x).

Por exemplo, no polinômio $P(x) = x^2 - 3x + 2$ temos $P(1) = 0$; logo, 1 é raiz ou zero desse polinômio.

- **Polinômios iguais**

Dizemos que dois polinômios A(x) e B(x) são iguais ou idênticos {$A(x) \equiv B(x)$} quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável ***x***. A condição para que dois polinômios sejam iguais ou idênticos é que **os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais**. ***Exemplo:***

Calcular ***a***, ***b*** e ***c***, sabendo-se que $x^2 - 2x + 1 \equiv a_*(x^2 + x + 1)+(bx + c)_*(x+1)$.

Resolução: Eliminando os parênteses e somando os termos semelhantes do segundo membro temos:

$x^2 - 2x + 1 \equiv ax^2 + ax + a + bx^2 + bx + cx + c$

$1x^2 - 2x + 1 \equiv (a+b)x^2 + (a+b+c)x + (a+c)$.

Agora igualamos os coeficientes correspondentes:

$$a+b=1$$
$$a+b+c=-2$$
$$a+c=1$$

¿
{¿{¿¿¿
¿

Substituindo a 1ª equação na 2ª:

1+c = -2 => **c = -3**.

Colocando esse valor de c na 3ª equação, temos:

a – 3 = 1 => **a=4**.

Colocando esse valor de a na 1ª equação, temos:

4 + b = 1 => **b=-3**.

Resposta: **a=4, b=-3** e **c=-3**.

- **Divisão de polinômios**

Sejam dois polinômios P(x) e D(x), com D(x) não nulo.

Efetuar a divisão de P por D é determinar dois polinômios Q(x) e R(x), que satisfaçam as duas condições abaixo:

1ª) Q(x).D(x) + R(x) = P(x)

2ª) gr(R) < gr(D) ou R(x)=0

Nessa divisão:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

P(x) é o dividendo; **D(x)** é o divisor; **Q(x)** é o quociente; **R(x)** é o resto da divisão.

<u>Obs:</u> Quando temos R(x)=0 dizemos que a divisão é exata, ou seja, P(x) é divisível por D(x) ou D(x) é divisor de P(x).

Se D(x) é divisor de P(x) ⇔ R(x)=0

Exemplo:
Determinar o quociente de P(x) = $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por D(x) = $x^2 + 3x - 2$.
Resolução: Aplicando o *método da chave*, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \hline -x^4-3x^3+2x^2 & x^2-2x+1 \to Q(x) \\ -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ +2x^3+6x^2-4x & \\ x^2+5x-1 & \\ -x^2-3x+2 & \\ 2x+1 \to R(x) & \end{array}$$

Verificamos que:

$$x^4+x^3-7x^2+9x-1 = \underbrace{(x^2+3x-2)}_{D(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}+\underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

- **Divisão de um polinômio por um binômio da forma ax + b**

Vamos calcular o resto da divisão de P(x) = $4x^2 - 2x + 3$ por D(x) = 2x - 1.

Utilizando o método da chave temos:

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-2x+3 & 2x-1 \\ \hline -4x^2+2x & 2x \\ 3 & \end{array}$$

Logo: R(x) = 3

A raiz do divisor é 2x - 1 = 0 => x = 1/2.

Agora calculamos P(x) para x = 1/2.

P(1/2) = 4(1/4) – 2(1/2) + 3

P(1/2) = 3

Observe que R(x) = 3 = P(1/2)

Portanto, mostramos que o resto da divisão de P(x) por D(x) é igual ao valor numérico de P(x) para x=1/2, isto é, a raiz do divisor.

- **Teorema do resto**

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio $ax+b$ é igual a **P(-b/a)**.

Exemplo: Calcule o resto da divisão de $x^2 + 5x - 1$ por x+1.

Resolução: Achamos a raiz do divisor:

x + 1 = 0 => x = -1

Pelo teorema do resto sabemos que o resto é igual a P(-1):

P(-1) = $(-1)^2$ + 5.(-1) -1 => P(-1) = -5 = R(x)

Resposta: **R(x) = -5**.

- **Teorema de D'Alembert**

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio $ax+b$ se **P(-b/a) = 0**

Exemplo: Determinar o valor de ***p***, para que o polinômio P(x)=$2x^3 + 5x^2 – px + 2$ seja divisível por x-2.

Resolução: Se P(x) é divisível por x-2, então P(2)=0.

P(2)=0 => 2.8+5.4-2p+2=0 => 16 + 20 -2p + 2=0 => p=19

Resposta: **p=19**.

- **O dispositivo de Briot-Ruffini**

Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).

Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio

P(x) = $3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por (x - 2).

Resolução:

$$\begin{array}{c|ccc|c} \text{RAIZ DO DIVISOR} & \multicolumn{3}{c|}{\text{COEFICIENTES DE } P(x)} & \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & \downarrow & 3.(2)-5 & 1.(2)+1 & 3.(2)-2 \\ & 3 & 1 & 3 & 4 \\ & \multicolumn{3}{c|}{\text{COEFICIENTES DO QUOCIENTE } Q(x)} & \text{RESTO} \end{array}$$

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.

Resposta: **Q(x) = 3x² + x + 3** e **R(x)=4**.

Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:

1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da “cerquinha”.

2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

- **Teorema das raízes racionais** (ou **teste das raízes racionais)** estabelece uma condição sobre as soluções racionais de uma equação polinomial

com coeficientes **inteiros**.

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1 x^1+a_0$$

Estas soluções são as possíveis raízes (equivalentemente, os zeros) do polinômio do lado esquerdo da equação.

Se a_0 e a_n são diferentes de zero, então, cada solução racional x, quando escrita como uma fração irredutível $x = p/q$ (isto é, em que o máximo divisor comum de p e q é 1), então:

- p é um divisor do termo constante a_0, e
- q é um divisor do coeficiente líder a_n.

Demonstração: Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ para certos valores de $a_0, ..., a_n \in \mathbf{Z}$, e

suponha que $P(p/q) = 0$ para certos números primos entre si $p, q \in \mathbf{Z}$:

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_o=0$$

Se ambos os membros forem multiplicados por q^n, o termo constante for movido para o lado direito, e for colocado em evidência um fator *p* do lado esquerdo, obtém-se

$$p\left(a_n p^{n-1}+a_{n-1} q p^{n-2}+\ldots+a_1 q^{n-1}\right)=-a_o q^n$$

Observa-se que ***p*** multiplicado pela quantidade inteira entre parêntesis é igual a $-a_0q^n$, então ***p*** divide a_0q^n. Mas ***p*** e ***q*** são primos entre si e portanto ***p*** e q^n também, então pelo lema de Euclides (em sua forma generalizada) ***p*** deve dividir o fator restante a_0 do produto.

Se em vez disso o termo líder for movido para a direita e for colocado em evidência um fator *q* no lado esquerdo, obtém-se

$$q\left(a_{n-1} p^{n-1}+a_{n-2} q p^{n-2}+\ldots+a_0 q^{n-1}\right)=-a_n p^n$$

E por razões semelhantes, pode-se concluir que ***q*** divide a_n.

16) Resolver a Equação: $6x^3-x^2-20x+12=0$.

Vamos supor que exista uma raiz racional $x_1=\frac{p}{q}$, tal que p, q $\mathbb{Z}$ => p é divisor de **12** e q é divisor de **6**, ou seja x_1 $Q=\left\{\pm\frac{1}{6};\pm\frac{1}{3};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{2}{3};\pm 1;\pm\frac{4}{3};\pm\frac{3}{2};\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12\right\}$.

Ao testar as raízes vemos que:

$$6*\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{20*2}{3}+12=\frac{16}{9}-\frac{4}{9}-\frac{40}{3}+12=\frac{-108}{9}+12=0 \quad .$$

Ou seja, $\frac{2}{3}$ é uma raiz da equação. Usando Briot-Rufinni para dividir por $x-\frac{2}{3}$; teremos:

2/3	6	-1	
	6	3	

Então podemos reescrever a equação como:

$$6x^3-x^2-20x+12=\left(x-\frac{2}{3}\right)*\left(6x^2+3x-18\right)=0$$

Resolvendo a equação $6x^2+3x-18=0=$¿$2x^2+x-6=0$ achamos as raízes:

$x_1=\frac{3}{2}\, ou\, x_2=-2$ => Solução = $\left\{-2;\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}$, que não por acaso é um subconjunto do conjunto "***Q***" acima.

Exercícios:

01. Sejam A = $x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ e B = $x^2 - 1$, polinômios. Determine o quociente e o resto de A na divisão por B.

02. Fatore $n^5 + n^4 + 1$.

03. (ITA 2011) Se 1 é raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com ***a***, ***b*** $\in$ **R,** então $a^2 - b^3$ é igual a:

a) -64 b) -36 c) -28 d) 18 e) 27

04. (ITA 2008) Sendo ***c*** um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos $(x + a)^3 - (x + b)^3$. Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a:

a) 104 b) 114 c) 124 d) 134 e) 144

05. (ITA 2005) No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a:

a) -1/2 b) -1/4 c) 1/2 d) 1 e) 3/2

06. (ITA 2003) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x-1), obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se P(x) por (x+1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que P(x) é divisível por (x – 2), tem-se que o valor de $(a*b)/c$ é igual a:

a) -6 b) -4 c) 4 d) 7 e) 9

07. (ITA 2008) Sejam $,\beta e \gamma$ R ; Considere o polinômio p(x) dado por $x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha - 2\beta - 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha - \beta + \gamma - 1)$: Encontre todos os valores de $\alpha, \beta e \gamma$; e de modo que x = 0 seja uma raiz com multiplicidade 3 de p(x).

08. (IME 2008) Encontre o polinômio P(x) tal que $Q(x) + 1 = (x-1)^3 * P(x)$ e Q(x) + 2 é divisível por x^4, em que Q(x) é um polinômio de 6º grau.

09. (ITA 2008) Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$; em que uma das raízes é x = 1: Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = \frac{1}{2}$, então p(2) é igual a:

A ( ) 25 B ( ) 27 C ( ) 36 D ( ) 39 E ( ) 40

10. (IME 2015) Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

A( ) x^2+x-2 B( ) $6x^2-4x+3$ C( ) $3x-9$ D( ) $6x^2-17x-3$ E( ) $6x+1$

11. (Putman) Find all polynomials satisfying the functional equation:
$(x-1)P(x) = (x-10)P(x-1)$

12. (Bucharest 1943) Prove a Igualdade:
$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$

13. (Bélgica 1978) Find a polynomial with integer coefficients that has the zero $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ **.**

14. (USA 1975) Let P(x) be a polynomial of degree “n”, so that P(k) = k/(k + 1) for k = 0; 1;…;n. Find P(n + 1).