**Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR**
Curso de Combinatória, Nível 3
1º semestre de 2019

Vitor Emanuel Gulisz

## Análise Combinatória: Mais alguns problemas

Antes de listarmos os problemas, vamos revisar alguns resultados.

**Permutações com repetição.** Considere $n$ objetos que podem ser iguais. Digamos que existem $k$ tipos diferentes de objetos, dentre os $n$. Se existem $a_1$ objetos do tipo 1, $a_2$ objetos do tipo 2, e assim por diante, e $a_k$ objetos do tipo $k$, então temos $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, com $a_i \geq 1$, para $1 \leq i \leq k$. Neste caso, existem quantas permutações entre os $n$ objetos?

$$\text{Resposta: } P_n^{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

**Combinações.** De quantos modos podemos escolher $k$ objetos distintos entre $n$ objetos distintos dados, considerando que a ordem destes $k$ objetos não importa? Ou equivalentemente, quantos são os subconjuntos de $k$ elementos de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de $n$ elementos?

$$\text{Resposta: } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Binômio de Newton.** Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então temos a seguinte relação:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## Problemas

1. Um elétron está no inicialmente no ponto $(0,0,0)$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Este elétron pode se movimentar pelo espaço através de saltos, sendo que os possíveis saltos são:

   - Se deslocar uma unidade positiva no eixo $x$;
   - Se deslocar uma unidade positiva no eixo $y$;
   - Se deslocar uma unidade positiva no eixo $z$;
   - Se deslocar uma unidade positiva em cada eixo simultaneamente.

   De quantos modos o elétron pode se deslocar do ponto $(0,0,0)$ para o ponto $(3,3,3)$?

2. Quantas diagonais um polígono convexo $\mathcal{P}$ de $n$ lados possui?

3. Prove que um conjunto de $n$ elementos possui exatamente $2^n$ subconjuntos.

4. Prove de dois modos diferentes que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$, onde $n \geq 1$.

5. Prove que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$, onde $n \geq 1$.

6. Dado um conjunto não-vazio $A$ com uma quantidade par de elementos, prove que o número de subconjuntos de $A$ com um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos de $A$ com um número par de elementos.

7. De $3n+1$ objetos, $n$ são idênticos e os demais são todos distintos. Mostre que é possível escolher $n$ objetos entre os $3n+1$ objetos de $2^{2n}$ modos.

8. Quantos subconjuntos de $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ possuem a propriedade de que não possuem números sucessivos?

## Bibliografia


1. ENGEL, A. *Problem-Solving Strategies.* New York: Springer-Verlag, 1998.


| |
|---|
| Antes de ver a solução de um problema tente passar um bom tempo tentando resolver ele! Só assim você poderá apreciar sua solução e aprender com ela. |

## Respostas, Dicas e Soluções

1. Se o elétron está na posição $(a, b, c)$, então os saltos possíveis correspondem a somar em suas coordenadas $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ e $(1,1,1)$, respectivamente. Então, por exemplo, se o elétron se desloca uma unidade no eixo $x$, então ele salta para o ponto $(a+1, b, c)$.

   Vamos denotar os saltos correspondentes a $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ e $(1,1,1)$ por $x, y, z$ e $w$, respectivamente. Temos 4 casos a considerar:

   **1º Caso.** Ocorrem 3 saltos do tipo $w$.
   Então a única sequência de movimentos possível é $www$, e logo temos 1 possibilidade.

   **2º Caso.** Ocorrem exatamente 2 saltos do tipo $w$.
   Neste caso os movimentos que o elétron realiza são $w, w, x, y, z$, e cada permutação destes movimentos corresponde a uma possível trajetória. Portanto, temos $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$ possibilidades.

   **3º Caso.** Ocorre exatamente 1 salto do tipo $w$.
   Então o elétron realiza os movimentos $w, x, x, y, y, z, z$, e cada permutação destes movimentos corresponde a uma possível trajetória. Portanto, temos $P_7^{2,2,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 630$ possibilidades.

**4º Caso.** Não ocorrem saltos do tipo $w$.

Neste caso os movimentos que o elétron realiza são $x, x, x, y, y, y, z, z, z$, e cada permutação destes movimentos corresponde a uma possível trajetória. Portanto, temos $P_9^{3,3,3} = \dfrac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680$ possibilidades.

Assim, há $1 + 60 + 630 + 1680 = 2371$ possibilidades para o elétron se deslocar do ponto $(0, 0, 0)$ para o ponto $(3, 3, 3)$.

2. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vértices de $\mathcal{P}$. Cada diagonal corresponde a um par de vértices $\{v_i, v_j\}$, com $v_i$ e $v_j$ não sendo consecutivos. Por exemplo, $\{v_1, v_4\}$ corresponde a uma diagonal, enquanto que $\{v_2, v_3\}$ corresponde a um lado de $\mathcal{P}$, e logo não é uma diagonal.

   Portanto, o número de diagonais corresponde ao número de pares de vértices não consecutivos de $\mathcal{P}$. Então a resposta é:

$$\binom{n}{2} - n \;=\; \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n \;=\; \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

3. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com $n$ elementos. A cada subconjunto $B \subseteq A$ associamos uma sequência $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dada por

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i \notin B \\ 1, & \text{se } a_i \in B \end{cases}$$

   Veja alguns exemplos:

$$\begin{array}{ccc} B = \{a_1, a_2\} & \longleftrightarrow & (1,1,0,0,\ldots,0,0) \\ B = \{a_3, a_n\} & \longleftrightarrow & (0,0,1,0,\ldots,0,1) \\ B = A & \longleftrightarrow & (1,1,1,1,\ldots,1,1) \\ B = \varnothing & \longleftrightarrow & (0,0,0,0,\ldots,0,0) \end{array}$$

   Assim, o número de subconjuntos de $A$ corresponde ao número de sequências de 0 e 1 com $n$ termos.

   Segue do princípio multiplicativo que existem $2^n$ sequências deste tipo. Portanto, $A$ possui $2^n$ subconjuntos.

4. **1ª Prova.** Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos. Segue do Problema 3 que $A$ possui $2^n$ subconjuntos. Agora vamos dividir os subconjuntos de $A$ da seguinte forma: subconjuntos com 0 elementos, com 1 elemento, com 2 elementos, ..., com $n$ elementos. Temos exatamente $\binom{n}{0}$ subconjuntos com 0 elementos, $\binom{n}{1}$ subconjuntos com 1 elemento, $\binom{n}{2}$ subconjuntos com 2 elementos, ..., $\binom{n}{n}$ subconjuntos com $n$ elementos. Bom, é claro que temos:

$$\begin{array}{rl} \text{número de subconjuntos de } A = & \phantom{+}\ \text{número de subconjuntos de } A \text{ com 0 elementos} \\ & + \text{ número de subconjuntos de } A \text{ com 1 elemento} \\ & + \text{ número de subconjuntos de } A \text{ com 2 elementos} \\ & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & + \text{ número de subconjuntos de } A \text{ com } n \text{ elementos} \end{array}$$

Portanto, juntando as informações acima, obtemos que:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

**2ª Prova.** Sabemos do binômio de Newton que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale que:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Logo, basta substituir $x = y = 1$ e assim obtemos:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

5. Basta substituir $x = -1$ e $y = 1$ em $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

6. Seja $2k$ o número de elementos do conjunto $A$, onde $k \geq 1$. Segue do Problema 5 que

$$\binom{2k}{0} - \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} - \binom{2k}{3} + \ldots + (-1)^{2k-1}\binom{2k}{2k-1} + (-1)^{2k}\binom{2k}{2k} = 0$$

$$\implies \binom{2k}{0} - \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} - \binom{2k}{3} + \ldots - \binom{2k}{2k-1} + \binom{2k}{2k} = 0.$$

Assim, separando os termos $\binom{2k}{j}$ com $j$ par e depois com $j$ ímpar, obtemos:

$$\binom{2k}{0} + \binom{2k}{2} + \ldots + \binom{2k}{2k} = \binom{2k}{1} + \binom{2k}{3} + \ldots + \binom{2k}{2k-1}.$$

Mas $\binom{2k}{0} + \binom{2k}{2} + \ldots + \binom{2k}{2k}$ é exatamente o número de subconjuntos de $A$ com uma quantidade par de elementos, e $\binom{2k}{1} + \binom{2k}{3} + \ldots + \binom{2k}{2k-1}$ é exatamente o número de subconjuntos de $A$ com uma quantidade ímpar de elementos. Portanto, a igualdade acima prova o que queríamos.

7. Vamos chamar os objetos idênticos de *obiekt*, que é “objeto” em polonês. Vamos considerar os seguintes casos:

- Entre os objetos escolhidos, temos 0 *obiekt*: então temos $\binom{2n+1}{n}$ possibilidades.
- Entre os objetos escolhidos, temos 1 *obiekt*: então temos $\binom{2n+1}{n-1}$ possibilidades.

- Entre os objetos escolhidos, temos 2 *obiekt*: então temos $\dbinom{2n+1}{n-2}$ possibilidades.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

- Entre os objetos escolhidos, temos $n$ *obiekt*: então temos $\dbinom{2n+1}{0}$ possibilidades.

Seja $x$ o número de modos que podemos escolher $n$ objetos entre os $3n+1$ objetos. Pelo o que vimos acima, temos:

$$x = \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n-2} + \ldots + \binom{2n+1}{0}.$$

Agora, lembre que $\dbinom{m}{k} = \dbinom{m}{m-k}$, para todo $0 \leq k \leq m$. Assim, realizando esta mudança em cada termo da soma acima, obtemos:

$$x = \binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+2} + \binom{2n+1}{n+3} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1}.$$

Portanto, somando as duas equações acima, temos:

$$2x = \binom{2n+1}{0} + \ldots + \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1}.$$

Utilizando o resultado do Problema 4, concluímos que:

$$2x = 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n} \quad\Longrightarrow\quad x = 2^{2n}.$$

8. Vamos adotar uma estratégia semelhante a que foi usada para resolver o Problema 3. A cada subconjunto $B$ de $A_n$, associamos uma sequência $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dada por

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i \notin B \\ 1, & \text{se } a_i \in B \end{cases}$$

Queremos encontrar o número de sequências de 0 e 1, de $n$ termos, com a propriedade de que estas sequências não tenham dois termos 1 consecutivos. Veja alguns exemplos:

$$\begin{array}{cccc} B = \{1,3\} & \longleftrightarrow & (1,0,1,0,\ldots,0) & \text{É permitido} \\ B = \{1,2\} & \longleftrightarrow & (1,1,0,0,\ldots,0) & \text{Não é permitido} \\ B = \{1,2,3\} & \longleftrightarrow & (1,1,1,0,\ldots,0) & \text{Não é permitido} \\ B = \varnothing & \longleftrightarrow & (0,0,0,0,\ldots,0) & \text{É permitido} \end{array}$$

Seja $a_n$ o número de sequências com a propriedade acima. Vamos analisar alguns casos particulares:

- Se $n = 1$, então podemos ter $(0)$ ou $(1)$, logo $a_1 = 2$.
- Se $n = 2$, então podemos ter $(0,0)$ ou $(1,0)$ ou $(0,1)$, logo $a_2 = 3$.
- Se $n = 3$, então podemos ter $(0,0,0)$ ou $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$ ou $(1,0,0)$ ou $(1,0,1)$, logo $a_3 = 5$.

- Se $n = 4$, então podemos ter $(0,0,0,0)$ ou $(0,1,0,0)$ ou $(0,1,0,1)$ ou $(0,0,1,0)$ ou $(0,0,0,1)$ ou $(1,0,0,0)$ ou $(1,0,1,0)$ ou $(1,0,0,1)$ logo $a_4 = 8$.

Agora vamos dar uma solução geral: dada uma sequência de 0 e 1, de $n$ termos com a propriedade acima, temos duas possibilidades para o primeiro termo, ou é 0 ou é 1. Se o primeiro termo é 0, então temos $a_{n-1}$ modos de completar a sequência. Se o primeiro termo é 1, então o segundo deve ser 0, e logo temos $a_{n-2}$ modos de completar a sequência. Portanto, temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

Assim, $a_n$ é igual ao número de Fibonacci $F_{n+2}$, onde os números de Fibonacci são dados por: $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | ... |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | ... |
| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | ... |