Exame de qualificação - PPGMA - 27/08/2012

Instruções:

- Resolva 5 das questões abaixo (2,0 pontos cada).
- As soluções devem conter o desenvolvimento e/ou justificativas.

Questões:

1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2}$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^2$. Mostre que:

   (a) Se $a \in (-2, 2)$, então $\bar{x}$ é minimizador local de f;

   (b) Se $|a| > 2$, então $\bar{x}$ é ponto de sela de f;

   (c) Verifique se para algum valor de a, o ponto $\bar{x}$ pode ser maximizador local de f.

2. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que se $\nabla f(x)^T d = 0$, então a função cresce a partir de x ao longo de d;

   (b) Suponha que d é uma direção de descida a partir de x. Mostre que a busca exata fornece $t^* = -\dfrac{\nabla f(x)^T d}{d^T A d}$;

   (c) Suponha que d é uma direção de descida a partir de x. Mostre que se t^* satisfaz a condição de Armijo
   $$f(x + t^* d) \leq f(x) + \eta t^* \nabla f(x)^T d,$$
   então $\eta \leq \dfrac{1}{2}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$.

   (a) Mostre que qualquer que seja o ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}$, a sequência gerada pelo método de Newton satisfaz $f(x^k) > 0$ e $x^k > x^*$, para todo $k \geq 1$; (sugestão: use a convexidade de f)

   (b) Mostre que $x^* < x^{k+1} < x^k$, para todo $k \geq 1$ e conclua que $x^k \to x^*$.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva.

   (a) Defina vetores A-conjugados;

   (b) Prove que um conjunto qualquer de vetores A-conjugados não nulos é linearmente independente;

   (c) Calcule as direções conjugadas para
   $$f(x) = \frac{x_1^2}{2} - x_1 x_3 + x_2^2 + \frac{3x_3^2}{2} - 2x_1 + x_3$$
   a partir de $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^3$, pelo algoritmo de gradientes conjugados.

5. Considere o seguinte problema de otimização com restrições

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sujeito a} & x_2 \leq x_1^2. \end{array}$$

(a) Encontre os 3 pontos estacionários deste problema, por meio das condições de KKT;

(b) Prove que um deles é ponto de sela e que os outros dois são minimizadores globais;

(c) Faça uma representação geométrica.

6. Considere os problemas

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 x_3 = 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3. \end{array} \tag{1}$$

e

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 x_3 = 1. \end{array} \tag{2}$$

(a) Mostre que o problema (1) tem um minimizador global $x^* \in \mathbb{R}^3$;

(b) A partir de x^*, encontre outros 3 minimizadores globais para o problema (1);

(c) Mostre que qualquer um deles também é minimizador global para o problema (2).

Algoritmo 1 *Gradientes conjugados para minimizar* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, faça $d^0 = -\nabla f(x^0)$

$k = 0$

REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

$\quad t_k = \underset{t \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x^k + td^k) \right\}$

$\quad x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

$\quad \beta_k = \dfrac{(d^k)^T A \nabla f(x^{k+1})}{(d^k)^T A d^k}$

$\quad d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$

$\quad k = k + 1$

BOA PROVA