Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada
Exame de Qualificação de Álgebra Linear Aplicada
11/08/2010

1. (1,5) Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica é definida positiva se $x^T Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que A é definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos.

2. (1,5) Suponha que $p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é o polinômio característico de uma matriz não singular A. Mostre que a inversa de A é um polinômio de A de grau $n-1$, i.e., $A^{-1} = \beta_1 I + \beta_2 A + \ldots + \beta_n A^{n-1}$.

3. (1,5) Seja A uma matriz $n \times n$ não singular e $b \in \mathbb{R}^m$. Use a decomposição em valor singular (SVD) para dar uma representação da solução do sistema linear.

4. (2,5) Considere a transformação de Householder generalizada

$$P = I - \frac{1}{(x-y)^T x}(x-y)(x-y)^T$$

   onde $(x-y)^T x \neq 0$. Pede-se:

   - Estabeleça condições sobre x e y que garantem que $\|Pu\|_2 = \|u\|_2$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ não nulo.
   - Se $y = \|x\|_2 e_1$, então P é a transformação de Householder? Justifique sua resposta.
   - Modifique P de modo que $\|Pu\|_2 = \|u\|_2$ para todo x, y, u não nulos.

5. (2,0) Obtenha a decomposição LU e a decomposição QR (pela transformação de Household) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (1,5) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular. Mostre que se A tem uma decomposição LU, então a decomposição é única.