Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada

Exame de Qualificação em Álgebra Linear Aplicada

06/04/2009

1. (2,0) Determine a decomposição LU e a decomposição QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (2,0) Para cada afirmação abaixo, prove-a ou dê um contra-exemplo.

   (a) Se λ é autovalor de A, então $\bar{\lambda}$ é um autovalor de $\bar{A}$.

   (b) Se λ é autovalor de A e $\mu \in C$, então $\lambda - \mu$ é autovalor de $A - \mu I$.

   (c) Se λ é autovalor de A, então $-\lambda$ é um autovalor de A.

   (d) Se λ é autovalor de A, então λ também é autovalor de A^T.

3. (1,0) Prove ou dê um contra-exemplo para a afirmação:
   Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são duas matrizes com $\|A\|_2 \geq \|B\|_2$ e existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = \lambda x$ e $Bx = \mu x$, então $\lambda > \mu$.

4. (2,5) Use o método de decomposição em valor singular (SVD) para:

   (a) provar que toda matriz A pode ser representada através de uma combinação linear de matrizes de posto um.

   (b) assumindo que os valores singulares são positivos, encontrar uma fórmula para a solução por quadrados mínimos do sistema linear $Ax = b$.

5. (1,5) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Mostre que $f(x) = \sqrt{x^T A x}$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$ se e somente se A é definida positiva.
   Dica: Fatoração de Cholesky pode ser útil para mostrar a desigualdade triangular.

6. (1,5) Determine a solução de mínimos quadrados para

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$