Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada

Exame de Qualificação de Álgebra Linear Aplicada

25/08/2009

1. (2,0) Considere $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   (a) Sejam $v \in \Omega$ e $A = vv^T$. Encontre todos os autovalores e autovetores de A.

   (b) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e $q : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $q(x) = \dfrac{x^T Ax}{x^T x}$. Sendo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ os autovalores de A, mostre que

   $$\lambda_1 = \min_{x\in\Omega} q(x) \quad \text{e} \quad \lambda_n = \max_{x\in\Omega} q(x).$$

2. (1,5) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de posto 1. Mostre que existem $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $A = uv^T$.

3. (1,5) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. Suponha que uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é tal que ${x_k}^T Ax_k \to 0$. Mostre que $x_k \to 0$. Este resultado continua válido se a matriz A for apenas semi-definida positiva?

4. (1,5) Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sendo $\|A\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$, mostre que $\|A\|_2$ é o maior valor singular de A.

5. (1,5) Determine as decomposições LU e QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (2,0) Seja $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Considere a transformação de Householder $P = I - \dfrac{2}{v^T v} vv^T$.

   (a) Mostre que P é simétrica e ortogonal.

   (b) Mostre que P é uma reflexão relativamente ao hiperplano $\pi = v^\perp$.

7. (1,5) Mostre que o conjunto das matrizes não singulares é denso em $\mathbb{R}^{n\times n}$, isto é, dados $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\varepsilon > 0$, existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, não singular, tal que $\|B - A\|_2 < \varepsilon$. (Sugestão: use decomposição de valor singular.)

BOA PROVA