Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada
Exame de Qualificação em Álgebra Linear Aplicada
30/03/2012

1. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ a norma-1 em $\mathbb{R}^n$.

   Mostre que a norma matricial induzida por esta norma vetorial satisfaz
   $$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. Faça o que se pede:

   (a) Estabeleça duas condições para uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ser definida positiva.

   (b) Mostre que essas condições são equivalentes.

3. Sejam A e B matrizes reais de ordem n. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) A não pode ser similar a $A + I$.

   (b) Se A e B são similares $\Rightarrow$ $posto(A) = posto(B)$.

   (c) A e B são similares $\Leftrightarrow$ A^2 e B^2 são similares.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A pseudo-inversa de A é a matriz A^+ tal que $AA^+A = A$ e $A^+AA^+ = A^+$ (A^+A e AA^+ são simétricas).

   (a) Use a SVD para dar uma expressão para a pseudo-inversa da matriz A.

   (b) Mostre que AA^+ é a matriz de projeção ortogonal sobre $Im(A) \subset \mathbb{R}^m$.

   (c) Mostre que A^+A é a matriz de projeção ortogonal sobre $Im(A^+) \subset \mathbb{R}^n$.

5. Seja $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$. Encontre os autovalores da transformação de Householder $P = I-(2/v^Tv)vv^T$, indicando a multiplicidade de cada autovalor encontrado.

6. Mostre, usando o teorema de Gershgorin, que

   (a) se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é tal que $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para $i = 1, \ldots, n$, então A é não singular.

   (b) a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ possui pelo menos dois autovalores reais.