UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Exame de qualificação
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada
Álgebra Linear Numérica

Professores: Ailin Ruiz de Zarate Fabregas e Luiz Carlos Matioli

NOME: ____

Instruções:
1. A prova deve ser entregue até _______.
2. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3. Responda as 4 primeiras questões e escolha mais uma entre as questões 5 e 6.
4. Cada questão escolhida vale 2 pontos. Total da prova: 10 pontos.
5. Justifique todas as respostas.
6. Escreva de forma visível e com letra legível.

Questões:

1. Suponha que $p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ é o polinômio característico de uma matriz não singular A. Mostre que a inversa de A tem a forma $A^{-1} = \beta_1 I + \beta_2 A + \cdots + \beta_n A^{n-1}$, ou seja é um polinômio em A de grau $n-1$ e escreva os coeficientes β_i, $i = 1 \dots n$ a partir dos coeficientes a_j, $j = 1 \dots n$.

2. Para uma matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ dada, existe uma única B chamada de sua inversa generalizada que satisfaz as seguintes quatro condições:

$$ABA = A, \quad BAB = B, \quad (AB)^T = AB, \quad (BA)^T = BA.$$

Suponha que $A = U\Sigma V^T$. Mostre que $B = V\Sigma^\dagger U^T$ é a inversa generalizada de A, em que U e V são ortogonais e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n} \quad \text{e} \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times m}.$$

3. Seja A uma matriz quadrada. Defina $A_0 = A = Q_0R_0$ como sua decomposição QR. Então $A_{k+1} = R_kQ_k$, onde $A_k = Q_kR_k$ é a decomposição QR de A_k. Mostre que A_{k+1} é similar a A.

4. Escreva um algoritmo para a decomposição QL de uma matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ($A = QL$), onde Q é ortogonal e L é triangular inferior. Aplique o algoritmo que escreveu para obter a decomposição QL da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

ESCOLHA UMA DAS QUESTÕES EMBAIXO PARA RESOLVER:

5. Seja $y \in R^n$ e $N(y,k) = I - ye_{n-k}^T \in R^{n\times n}$. Determine o que se pede:

   (i) Uma fórmula para $N(y,k)^{-1}$ caso exista.

   (ii) Dado $x \in R^n$, em que condições y pode ser determinado tal que $N(y,k)x = e_k$?

   (iii) Usando $N(y,k)$, forneça um algoritmo que sobrescreve A com A^{-1}. Quais condições sobre A asseguram o sucesso do seu algoritmo?

6. Considere a transformação de Householder generalizada

$$P = I - axy^T.$$

   Determine o que se pede:

   (i) Quais condições sobre x e y asseguram $\|Pu\|_2 = \|u\|_2$, para todo $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$.

   (ii) Determine x tal que $Pu = ke_k$ onde $k = \|u\|_2$ para $u \neq 0$ dado.

   (iii) Obtenha P^{-1}.

QUESTÃO ESCOLHIDA: _____.

BOA PROVA!