UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação. Equações Diferenciais Parciais. 04/12/2015

Professores: Jurandir Ceccon, Cléber de Medeira e Ailín Ruiz de Zárate

NOME: ____

Instruções:
1. A prova deve ser entregue até 13:00.
2. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3. Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. (**1,5 pontos**) Considere a equação eikonal $u_x^2 + u_y^2 = n^2$, n constante positiva.
   (a) Obtenha a solução do Problema de Cauchy com $\Gamma : x = y = s,\ z = 0$.

2. (**2,5 pontos**) Considere a Equação da onda unidimensional bidirecional $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $c > 0$ em um domínio aberto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Calcule as equações das duas famílias de características.
   $$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct.$$
   (b) Utilize as expressões obtidas para transformar a Equação da onda acima na EDP
   $$u_{\xi\eta} = 0.$$
   (c) Sabendo que uma função $u \in C^2(V)$, V convexo tal que $u_{\xi\eta} = 0$ é da forma $F(\xi) + G(\eta)$, obtenha a Fórmula de D'Alembert para o Problema de Valor Inicial
   $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
   com dados iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$.

3. (**3,5 pontos**) Considere o problema de condução de calor em uma barra de comprimento π com temperatura inicial f:
   $$\begin{cases} u \in C^2\left((0,\pi) \times (0,+\infty)\right) \cap C\left([0,\pi] \times [0,+\infty)\right) \\ u_t = u_{xx}, \qquad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \qquad f \in C^1([0,\pi]), \quad f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$
   (a) Ache um candidato a solução u.
   (b) Mostre que o problema tem uma solução em $C^\infty\left((0,\pi) \times (0,+\infty)\right)$ a partir do candidato a solução.
   (c) Mostre o Princípio do Máximo para o problema acima e daí prove que a solução achada é única.

4. (**2,5 pontos**) Prove que o Núcleo do calor
   $$K(x,t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$
   constitue uma identidade aproximada, é de classe C^∞ e satisfaz a equação do calor na reta $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pode utilizar sem demonstrar: o teorema da derivação dominada, o teorema de convergência uniforme nos compactos da convolução com o núcleo do calor e
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

□□□