UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação. Equações Diferenciais Parciais. 19/04/2016

Professores: Jurandir Ceccon, Cléber de Medeira e Ailín Ruiz de Zárate

NOME: ____

Instruções:	
1.	A prova deve ser entregue até 11:30.
2.	Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3.	Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. (**2 pontos**) Considere a Equação da onda unidimensional bidirecional $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $c > 0$, no domínio aberto e convexo $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,, t > 0\}$. Deduza a Fórmula de D'Alembert para o Problema de Valor Inicial

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

com dados iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$.

2. (**3 pontos**) Considere a Equação Diferencial Parcial (EDP) na forma divergente:

$$\nabla \cdot (S(u), R(u)) = 0,$$

onde $u(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e S, R são funções suaves $C^1(\mathbb{R})$.

   (a) Escreva a EDP correspondente na forma usual envolvendo u_x, u_y.

   (b) Qual é a relação a ser satisfeita por S e R para termos a equação de Burgers não viscosa $u_y + u\,u_x = 0$? A escolha $R(u) = u$, $S(u) = u^2/2$ satisfaz essa relação?

   (c) Obtenha a lei de conservação

$$\frac{d}{dy}\int_a^b R(u(x,y))dx + S(u(b,y)) - S(u(a,y)) = 0.$$

   (d) Suponha agora que $u(x,y)$ satisfaz a Lei de conservação acima no caso $R(u) = u$, $S(u) = u^2/2$, sendo u **descontínua** na curva $x = \xi(y)$ através da qual u experimenta um salto (choque). Denote por u^+ e u^- os limites de $u(x,y)$ quando (x,y) aproxima-se de $(\xi(y), y)$ pela direita e esquerda respectivamente. Qual é a velocidade do choque?

3. **(3 pontos)** Considere o problema de condução de calor em uma barra infinita com temperatura inicial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \ \textit{limitada} \\ u_t = u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Aplique o método de Transformada de Fourier ao problema para achar a candidata a solução.

   (b) Escreva a candidata achada no item anterior como uma convolução envolvendo o Núcleo do calor.

   (c) Prove que o Núcleo do calor é de classe C^∞ e satisfaz a equação do calor na reta.

   (d) Prove que a candidata a solução é de fato solução, ou seja, prove que u pertence ao espaço de funções do enunciado, é limitada e satisfaz a EDP e a condição inicial.

4. (**2 pontos**) Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz ou das funções C^∞ rapidamente decrescentes. Prove que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e

$$f(0) = 0,$$

então existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = xg(x)$.

□□□