PPGM- UFPR - Exame de qualificação de Otimização - 05/08/2016

Nome:.. Ass.:...

Valor da prova: 100 pontos

Questões:

1. (10 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Pede-se:

   (a) (5,0) Mostre que se f é convexa, então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

   $$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$

   (b) (2,5) Dê a interpretação geométrrica da desigualdade acima no caso $n = 1$.

   (c) (2,5) Conclua que todo ponto estacionário de uma função convexa diferenciável é um minimizador global.

2. (10 pontos) Considere o problema de minimizar a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1^2 + 9x_2^2$$

pelo método do gradiente com busca linear exata. Pede-se:

(a) (5,0) A partir do ponto inicial $\hat{x} = (0, 2)^T$, quantas iterações você espera realizar para atingir a solução?

(b) (5,0) E a partir do ponto inicial $\bar{x} = (2, -1)^T$, quantas iterações você espera realizar para atingir a solução?

Observação: Justifique suas respostas. Não calcule os iterandos do método, apenas explique o que acontecerá em cada caso.

3. (20 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Pede-se:

(a) (2,5) Defina direção de descida para f a partir de $\bar{x}$.

(b) (5,0) Prove que se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f a partir de $\bar{x}$.

(c) (2,5) Suponha $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Verifique que se H é uma matriz definida positiva, então

$$d = -H\nabla f(\bar{x})$$

é uma direção de descida para f a partir de $\bar{x}$.

(d) (5,0) Sejam $d \in \mathbb{R}^n$ uma direção de descida para f a partir de $\bar{x}$ e $\eta \in (0, 1)$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + td) \leq f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d,$$

para todo $t \in [0, \delta)$.

(e) (5,0) Apresente o algoritmo de busca de Armijo e justifique a sua boa definição.

4. (25 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Dados $x^k, x^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ e $B_{k+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva, considere o seguinte modelo quadrático em torno de x^{k+1}:

$$m_{k+1}(x) = f(x^{k+1}) + \nabla f(x^{k+1})^T(x - x^{k+1}) + \frac{1}{2}(x - x^{k+1})^T B_{k+1}(x - x^{k+1}).$$

Pede-se:

(a) (2,5) Verifique que $m_{k+1}(x^{k+1}) = f(x^{k+1})$ e $\nabla m_{k+1}(x^{k+1}) = \nabla f(x^{k+1})$.

(b) (5,0) Mostre que $\nabla m_{k+1}(x^k) = \nabla f(x^k)$ se, e somente se,

$$B_{k+1}s^k = y^k, \tag{1}$$

onde $s^k = x^{k+1} - x^k$ e $y^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$.

(c) (10,0) A condição (1) é chamada de condição secante e nos fornece uma maneira de obter $B_{k+1} \approx \nabla^2 f(x^{k+1})$. Evidentemente a condição análoga para $H_{k+1} \approx (\nabla^2 f(x^{k+1}))^{-1}$ é

$$H_{k+1}y^k = s^k. \tag{2}$$

Dada uma matriz $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, deduza a fórmula quase-Newton DFP, isto é, encontre vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ e números reais $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$H_{k+1} = H_k + auu^T + bvv^T$$

seja simétrica e satisfaça a condição secante (2).

(d) (2,5) Enuncie (sem demonstração) uma condição suficiente sob a qual a matriz H_{k+1} dada pela fórmula DFP seja também definida positiva.

(e) (5,0) Apresente o algoritmo quase-Newton DFP com busca de Armijo.

5. (20 pontos) Considere $C \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo fechado, não vazio. Denote o polar de C por $P(C)$ e a projeção euclidiana ortogonal de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ em C por $proj_C(x)$. Prove que $\bar{z} = proj_C(z)$ se, e somente se,

$$\bar{z} \in C, \qquad z - \bar{z} \in P(C), \qquad \bar{z}^T(z - \bar{z}) = 0.$$

6. (15 pontos) Considere o problema de programação não linear

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & c_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\ & c_{\mathcal{I}}(x) \leq 0, \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, são funções de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) (5,0) Escreva as condições necessárias de otimalidade de KKT.

(b) (10,0) Discuta três condições diferentes de qualificação das restrições, incluindo relações de implicação entre elas.