Primeiro Exame de Qualificação (Doutorado) - Álgebra - 2012

Data: 21/12/2012

Faça 4 das questões a seguir.

1. Seja k um corpo, $M_n(k)$ a k-álgebra de matrizes $n \times n$, e considere o $M_n(k)$-módulo à direita $M_n(k)$. Para cada i entre 1 e n, seja L_i o subespaço linha associado em $M_n(k)$ (isto é, a matriz $(a_{k,l})$ está em L_i se e somente se $a_{k,l} = 0$ para todo $k \neq i$ e todo l).

   (a) Para cada $x \neq 0$ em L_i e cada $y \in L_i$, mostre que existe uma aplicação k-linear $f : L_i \to L_i$ tal que $f(x) = y$. (sugestão: comece por considerar uma base de L_i (como k-espaço) que contém x).

   (b) Conclua que $xM_n(k) = L_i$.

   (c) Use os itens anteriores para provar que $M_n(k)$ é uma k-álgebra semissimples.

2. Seja A uma k-álgebra.

   (a) Prove que um A-módulo I é injetivo se e somente se toda sequência exata curta

   $$0 \to I \to M \to N \to 0$$

   de A-módulos é cindida.

   (b) Considere dois morfismos de A-módulos $f : L \to M, g : L \to I$, com I injetivo. Mostre que se f é monomorfismo então o pushout de f e g é isomorfo à soma direta de I com o cokernel de f.

3. Sejam G um grupo, k um corpo, e kG a álgebra de grupo sobre k, isto é, o k-espaço gerado por G com a multiplicação

   $$(\sum_\sigma a_\sigma \sigma)(\sum_\sigma b_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma,\tau} a_\sigma b_\tau \sigma\tau.$$

   Se M e N são kG-módulos (à esquerda), podemos definir uma estrutura de kG-módulo no k-espaço vetorial $M \otimes_k N$ da seguinte forma: $\sigma(m \otimes n) = \sigma m \otimes \sigma n$, para todos $\sigma \in G$, $m \in M$ e $n \in N$. Temos assim definidos os funtores $\_ \otimes_K N : mod\ kG \to mod\ kG$ e $M \otimes_K \_ : mod\ kG \to mod\ kG$.

   Do mesmo modo, podemos definir uma ação de G no k-espaço $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ da seguinte forma: dados $\sigma \in G$ e $f \in \mathrm{Hom}_k(M, N)$, define-se $(\sigma \cdot f)$ por $(\sigma \cdot f)(m) = \sigma(f(\sigma^{-1}m))$ para todo $m \in M$.

   Sejam L, M, N kG-módulos.

   (a) Dado $f \in \mathrm{Hom}_{kG}(L, \mathrm{Hom}_k(M, N))$, mostre que a aplicação

   $$\begin{aligned} \alpha(f) : L \otimes_k M &\to N \\ l \otimes m &\mapsto f(l)(m) \end{aligned}$$

   está bem definida e que é um morfismo de kG-módulos.

   (b) Mostre que o morfismo

   $$\alpha : \mathrm{Hom}_{kG}(L, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(L \otimes_k M, N)$$

   dado por $f \mapsto \alpha(f)$ é um isomorfismo que é funtorial em L, M, N.

4. Seguindo o mesmo enunciado do exercicio 3,

   (a) Seja L um kG-módulo projetivo. Utilizando o resultado do item (3b), mostre que $L \otimes_k M$ e $M \otimes_k L$ são kG-módulos projetivos para qualquer kG-módulo M.

   (b) Usando o fato que uma álgebra A é semisimples se e somente se todo A-módulo é projetivo, mostre que são equivalentes:

      i. kG é semisimples.

      ii. O kG-módulo trivial k é projetivo (a estrutura de kG-módulo em k é $\sigma a = a$ para todo $\sigma \in G$, todo $a \in k$).

5. Seja A uma k-álgebra.

   (a) Se M é um A-módulo à direita, mostre que $\mathrm{Hom}_A(A_A, M) \simeq M$ como A-módulos, e que o isomorfismo é funtorial em M.

   (b) Seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \tag{1}$$

   uma sequência de A-módulos. Sabe-se que se esta sequência é exata então

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(X, N) \tag{2}$$

   é exata para cada A-módulo à direita X.
   Prove a recíproca: se (2) é exata para todo X então (1) é exata.

   (c) Seja (F, G) par de funtores adjuntos, sendo $F : \mathit{mod}\ A \to \mathit{mod}\ k$ e $G : \mathit{mod}\ k \to \mathit{mod}\ A$. Use os itens anteriores para mostrar que G é exato à esquerda.

6. Prove o teorema de isomorfismo de Noether: se temos submódulos $N \subset M_2 \subset M_1$ então existe um diagrama comutativo de A-módulos e morfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1/M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2/N \arrow[r] & M_1/N \arrow[r] & \dfrac{M_1/N}{M_2/N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

em que θ é um *isomorfismo*.