Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Álgebra

- Aluno: ____
- Data: 29/07/2019
- Banca examinadora:
  1. Edson Ribeiro Alvares
  2. Matheus Batagini Brito
  3. Maria Eugenia Martin
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.
  4. Nesta prova $\mathbf{K}$ denotará um anel comutativo, k denotará um corpo e, para uma $\mathbf{K}$-álgebra (ou k-álgebra) A, "A-módulo"significa "A-módulo à direita".

Questões

1. (a) Seja $A = k[X]$. Sabe-se que os A-módulos indecomponíveis M, de dimensão finita são da forma $M = k[X]/P(X)k[X]$ com $P(X)$ potência de um polinômio irredutível. Mostre que existe uma resolução projetiva de M da forma

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   (b) Se $A = k[X]/X^2k[X]$, sabe-se que um A-módulo indecomponível, de dimensão finita é da forma $k[X]/P(X)k[X]$, onde $P(X)$ divide X^2. Mostre que existe uma resolução projetiva de $M = k[X]/Xk[X]$ da forma:

$$\cdots \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

2. Sejam A uma $\mathbf{K}$-álgebra, M um A-módulo e $rad\ M$ o seu radical de Jacobson.
   (a) Mostre que se M é um módulo semissimples então $rad\ M = 0$.
   (b) Se A é uma álgebra artiniana e M é um A-módulo, então $rad\ M = M \cdot rad\ A$. Mostre que a hipótese de A ser uma álgebra artiniana é necessária.

3. Seja A uma $\mathbf{K}$-álgebra. Mostre que as $\mathbf{K}$-álgebras A e $M_n(A)$ são Morita equivalentes. ($M_n(A)$ *é a álgebra de matrizes* $n \times n$ *com entradas em* A)

4. Seja A uma $\mathbf{K}$-álgebra. Chamamos A de *hereditária* se todo submódulo de um A-módulo projetivo é projetivo.

(a) Seja N um A-módulo. Prove que se $Ext^1_A(-,N)=0$ então N é um A-módulo injetivo. (*neste item A é uma* $\mathbf{K}$*-álgebra arbitrária, não necessariamente hereditária*)

(b) Se A é hereditária e M um A-módulo, prove que $Ext^2_A(M,N)=0$ para todo $N \in Mod\ A$.

(c) Prove que se A é hereditária, I é um A-módulo injetivo e J é um submódulo de I, então I/J é injetivo.