UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Programa de Pós-Graduação em Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ÁLGEBRA
4/08/2017

Salvo menção em contrário, nesta prova $k$ denotará um anel comutativo, $A$ denotará uma $k$-álgebra e "$A$-módulo" significa $A$-módulo à direita; $M = M_A$ indica que $M$ é $A$-módulo à direita, $M = {}_AM$ indica que $M$ é $A$-módulo à esquerda e $M = {}_AM_B$ indica que $M$ é $(A, B)$-bimódulo.

**Questões**

1. Seja $M$ um $A$-módulo e sejam $N_1 \subset N_2 \subset M$ submódulos. Use o lema da serpente para mostrar que
$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \simeq \frac{M}{N_2}$$

2. Nesta questão você provará que não existem módulos injetivos na categoria mod $\mathbb{Z}$ dos $\mathbb{Z}$-módulos finitamente gerados, ou seja, dos grupos abelianos finitamente gerados.
Para isso, faça os itens a seguir.
   (a) Mostre que $\mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo
   (b) Mostre que $\mathbb{Z}p^r$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo, sendo $p$ um primo e $r$ um inteiro positivo.
   (c) O teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados diz que todo $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado é da forma
$$M \simeq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$$
onde $n \geq 0$, $r_i \geq 0$ para todo $i$ e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são primos não necessariamente distintos. Usando este resultado e os itens anteriores, conclua que não existem módulos injetivos em mod $\mathbb{Z}$.

3. Sejam $A$ uma álgebra e $B \subset A$ uma subálgebra de $A$. Considere os funtores de restrição de escalares $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ e o funtor de extensão de escalares $G = \_\otimes_B A : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$. Mostre que
   (a) $G$ preserva módulo livre.
   (b) $G$ preserva módulo projetivo.
   (c) O par $(G, F)$ é um par adjunto de funtores.

4. Sejam $A$ e $B$ duas álgebras Morita equivalentes, e seja $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ uma equivalência linear entre as categorias de módulos com quase-inversa $G : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$.
   (a) É verdade que se $A$ é comutativa então $B$ também é comutativa?
   (b) Mostre que se $P \in \operatorname{Mod} A$ é projetivo então $F(P) \in \operatorname{Mod} B$ é projetivo.
   (c) Mostre que se $A$ é semissimples se e somente se $B$ é semissimples.