UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Exame de qualificação de Álgebra Linear Aplicada
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM

Professores: Yuan Jin Yun, Elias Alfredo G Rojas e Luiz Carlos Matioli

Instruções:
1. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
2. Responda 4 questões dentre as 5 questões dadas.
3. Todas as questões valem 2.5 pontos.
4. Justifique todas as suas respostas.
5. Escreva de forma visível e com letra legível.
6. Marque na folha das questões quais você gostaria que fosse corrigida. Somente 4 serão corrigidas.

1. Considere $A \in R^{n\times n}$ uma matriz ortogonal. Mostre que

$$\frac{d}{dx}[A(x)^T] = -A(x)^T \frac{dA(x)}{dx} A(x)^T.$$

   Obtenha um resultado similar para matriz Unitária.

2. Considere $A \in R^{m\times n}$. Obtenha a solução de quadrados mínimos para $Ax = b$ e analise as diferentes possibilidades para m e n, nos seguintes casos

   (a) Suponha que exista a decomposição SVD de A, isto é $A = U\Sigma V$, em que U e V são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz diagonal de tamanho $m \times n$;

   (b) Suponha que exista a decomposição QR de A, isto é $A = QR$.

3. Considere x e y vetores não nulos e $x \neq y$. Obtenha uma matriz não singular P tal que $y = Px$. Apresente condições que x e y devem satisfazer para que P seja uma matriz ortogonal.

4. Considere $m \geq n$ e A uma matriz $m \times n$, com posto n. Prove que existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz não singular P tal que

$$A = Q\Gamma P^{-1}$$

onde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Além disso, prove que a solução x do problema de mínimos quadrados $(\min \|Ax - b\|_2)$ pode ser representada por

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^T b}{\gamma_i} p_i,$$

em que $\gamma_i = \sqrt{p_i^T A^T A p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$.

5. Considere A uma matriz $n \times n$. Mostre que se $||A||_p < 1$, então $(I - A)$ é não singular e

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \text{com} \quad ||(I - A)^{-1}||_p \leq \frac{1}{1 - ||A||_p}.$$

Boa Prova!