Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Álgebra Linear Aplicada

- Aluno: ____
- Data: 24/08/2020
- Banca examinadora:
  1. Professor Elias Alfredo Gudiño Rojas
  2. Professor Geovani Nunes Grapiglia
  3. Professor Lucas Garcia Pedroso
- Instruções:
  1. Faça apenas cinco questões. Escolha quatro entre as questões 1 a 5, e faça a questão 6.
  2. Apresente suas demonstrações de maneira detalhada.
  3. A prova tem duração de 3 horas e 45 minutos, incluindo o tempo para digitalização e envio à banca.

Questões:

1. (20 pontos) **Usando SVD**, mostre que o conjunto das matrizes reais $n \times n$ não-singulares é denso em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

2. (20 pontos) Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é diagonalizável, e que

$$X^{-1}AX = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{1}$$

com $X = [x_1 \ \ldots \ x_n]$,

$$\|x_i\|_2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

e

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|. \tag{3}$$

   (a) Descreva os passos principais do Método das Potências, com iteradas $\left(q^{(k)}, \lambda^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

   (b) Se

$$q^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \text{com } a_1 \neq 0, \tag{4}$$

   mostre que

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq 4\|A\|_2 \left(\sum_{i=2}^{n} \left| \frac{a_i}{a_1} \right| \right) \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad \forall k \geq 1. \tag{5}$$

3. (20 pontos) Faça os seguintes itens:

   (a) (10 pontos) Se $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|F\|_2 < 1$, mostre que $I - F$ é não-singular e

$$\| (I-F)^{-1} \|_2 \leq \frac{1}{1-\|F\|_2}. \tag{6}$$

   (b) (5 pontos) Dadas matrizes $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singulares, mostre que

$$P^{-1} = Q^{-1} - P^{-1}(P-Q)\,Q^{-1}. \tag{7}$$

   (c) (5 pontos) Combinando os resultados em (a) e (b), mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não-singular e $r = \|A^{-1}E\|_2 < 1$, então $A + E$ é não-singular e

$$\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|_2 \leq \frac{\|E\|_2\|A^{-1}\|_2^2}{1-r}. \tag{8}$$

4. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, suponha que as submatrizes principais $A_{k,k}$ são não-singulares para $k = 1, \ldots, n$. Nesse contexto, faça os seguintes itens:

   (a) Mostre que existem T triangular inferior e S simétrica e definida positiva tais que $A = TS$.

   (b) Escreva um algoritmo para calcular a decomposição TS de A. Seu algoritmo não pode envolver o cálculo de inversas de matrizes (triangulares ou não) e nem a solução de sistemas lineares tendo A como matriz.

5. (20 pontos) Descreva em detalhes **três formas diferentes** de se resolver o problema de quadrados mínimos linear

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2, \tag{9}$$

   com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \neq n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

6. (20 pontos) Faça uma dissertação sobre o tema "Aplicações da Decomposição em Valores Singulares". A dissertação deve englobar os seguintes tópicos:

   (i) Compressão de Imagens.

   (ii) Análise de Componentes Principais.

   (iii) Método das Autofaces para Reconhecimento Facial.