Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada
Exame de Qualificação em Álgebra Linear Aplicada
05/07/2013

1. Considere a matriz A tal que as matrizes V, Σ e U definidas por

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

sejam a decomposição SVD de A, $A = V\Sigma U^T$.

(a) Encontre a solução de norma-2 mínima x^* do problema de quadrados mínimos associado ao sistema linear $Ax = b$, com $b = [1, -1, 2, 1]^T$.

(b) Explicite a forma geral dos vetores que minimizam $\|Ax - b\|_2^2$.

2. Dados $u, v \in I\!R^n$ com $u^T v \neq 0$, obtenha todos os autovalores e autovetores da matriz $A = (I + uv^T)(I - uv^T)$.

3. Seja $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ uma matriz não singular e sejam $u, v \in I\!R^m$. Mostre que $A + uv^T$ é não singular se, e somente se, $v^T A^{-1} u \neq -1$.

4. Seja $A \in M_{m\times n}(I\!R)$, $b \in I\!R^m$ com $m > n$. Dado $\lambda > 0$, considere o vetor x_λ solução do problema

$$\min_{x \in I\!R^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2,$$

denominado *solução de quadrados mínimos regularizada* do sistema $Ax = b$. No problema acima, I e 0 denotam a matriz identidade de ordem n e o vetor nulo do $I\!R^n$, respectivamente.

(a) Deduza as equações normais para o problema de quadrados mínimos acima.

(b) Mostre que x_λ é única para cada $\lambda > 0$.

(c) Encontre a solução x_λ em termos da descomposição SVD da matriz A.

5. Desenvolva detalhadamente um algoritmo para realizar a decomposição $A = UL$ de uma matriz não singular $A \in M_{n\times n}(I\!R)$, sendo $U \in M_{n\times n}(I\!R)$ uma matriz triangular superior com $U_{i,i} = 1$ para $1 \leq i \leq n$, e $L \in M_{n\times n}(I\!R)$ uma matriz triangular inferior. Suponha que não é necessário utilizar permutações. Como você utilizaria a fatoração UL para resolver o sistema linear $Ax = b$?