Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# Exame de qualificação de Álgebra Linear Aplicada

- Aluno:
- Data: 31/07/2018
- Banca examinadora:
  1. Professor Elias Alfredo Gudiño Rojas
  2. Professor Geovani Nunes Grapiglia
  3. Professor Luiz Carlos Matioli
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.
  4. Faça apenas **quatro** questões. Escolha três entre as questões de 1 a 5, e uma entre as questões 6 e 7.

## Questões:

1. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, defina as submatrizes principais dominantes de $A$ por

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

   (a) (10 pontos) Se $A_k$ é não-singular para $k = 1, \dots, n-1$, mostre que $A$ possui uma fatoração LU.

   (b) (10 pontos) Se $A$ é não-singular e possui uma fatoração LU, mostre que tal fatoração é única.

2. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$, com colunas linearmente independentes, e um vetor $b \in \mathbb{R}^m$, considere o problema de quadrados mínimos linear

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2. \tag{1}$$

   (a) (10 pontos) Mostre que $x^*$ é solução de (1) se, e somente se, $x^*$ é solução do sistema de equações normais

$$A^TAx = A^Tb.$$

   (b) (10 pontos) Se existem $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (com colunas ortonormais) e $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior tais que $A = QR$, mostre que $x^*$ é solução de (1) se, e somente se, $Rx^* = Q^Tb$.

3. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$, considere a decomposição em valores singulares
$$A = U\Sigma V^T,$$
com $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal e $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal com entradas
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0.$$
   (a) (10 pontos) Se
   $$U = [u_1 \ldots u_m] \quad \text{e} \quad V = [v_1 \ldots v_n],$$
   mostre que
   $$A^T A v_j = \sigma_j^2 v_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$
   (b) (10 pontos) A partir de (2), descreva um método iterativo pelo qual todos os valores singulares $\sigma_j$ podem ser calculados.

4. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, e um vetor $w^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, unitário na norma euclidiana, considere o **Método das Potências**:

*Para* $k = 1, 2, \ldots$ *faça*
$$\begin{aligned} z^{(k)} &= A w^{(k-1)} \\ w^{(k)} &= z^{(k)}/\|z^{(k)}\|_2 \\ \lambda^{(k)} &= [w^{(k)}]^T A w^{(k)} \end{aligned}$$
*Fim*

Suponha que
$$Q^T A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$
com $Q = [q_1 \ldots q_n]$ ortogonal e $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ e defina $\theta_k \in [0, \pi/2]$ por
$$\cos(\theta_k) = |q_1^T w^{(k)}|.$$
Se $\cos(\theta_0) \neq 0$, mostre que
$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq |\lambda_1 - \lambda_n| \tan(\theta_0)^2 \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$$

5. (20 pontos) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-singular e possivelmente não-simétrica com todas as submatrizes principais dominantes não-singulares. Mostre que existem $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior com $1's$ na diagonal principal tais que $A = ST$.

6. (40 pontos) Faça uma dissertação sobre o tema *"Sistemas Lineares"*. A dissertação deve englobar os seguintes tópicos:
   (i) Eliminação de Gauss.
   (ii) Fatoração LU.
   (iii) Fatoração de Cholesky.

7. (40 pontos) Faça uma dissertaçao sobre o tema *"Transformações ortogonais e Fatoração QR"*. A dissertação deve englobar os seguintes tópicos:
   (i) Transformações de Householder e Givens.
   (ii) Cálculo da Fatoração QR via Gram-Schmidt, Householder e Givens.