MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação: Álgebra Linear Avançada (Agosto 2012)

Banca Examinadora:

- Prof. Cristián Ortiz
- Prof. Edson Ribeiro Alvares
- Prof. Higidio Portillo Oquendo

Instruções:

a) A prova tem uma duração de 3 horas;
b) Cada questão escolhida vale 2,5 pontos. A prova tem um total de 10,0 pontos;
d) Justifique todas as suas respostas.

Nome do aluno:

Questões

(1) Mostre que a função traço é o único funcional linear $\Phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(AB) = \Phi(BA)$, para quaisquer $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\Phi(I) = n$.

(2) Seja S um operador linear sobre um espaço vetorial V.

a) Mostre que

$$\{0\} \subseteq ker\ S \subseteq kerS^2 \subseteq \cdots$$

e

$$\cdots \subseteq Im\ S^3 \subseteq Im\ S^2 \subseteq Im\ S \subseteq V.$$

b) Mostre que se $ker\ S^n = ker\ S^{n+1}$ então $ker\ S^n = ker\ S^{n+k}$ para qualquer inteiro positivo k. Prove um resultado análogo para a ImS^n.

c) Mostre que se V tem dimensão finita, existe um menor inteiro positivo n tal que $ker\ S^n = ker\ S^{n+1}$. Nestas circunstâncias, verifique que $ker\ S^k \nsubseteq kerS^{k+1}$ para todo $k < n$. Prove um resultado análogo para $Im\ S^n$.

(3) Descreva as possíveis formas canônicas de Jordan para matrizes 6×6 sobre $\mathbb{C}$ que têm polinômio característico $(x-1)^2(x-4)^4$.

(4) Seja n um inteiro positivo e E o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais, nulo ou de grau inferior ou igual à n. Seja A um polinômio com coeficientes reais, unitário e de grau $n+1$. Seja $f : E \to E$ a aplicação que a todo polinômio P de E associa o resto da divisão euclidiana de XP por A.

i) Mostre que a aplicação f é linear.
ii) Qual é a matriz de f na base $\{1, X, \cdots, X^n\}$ de E.
iii) Calcule o polinômio característico de f.
iv) Seja λ um valor próprio de f. Mostre que λ é raiz de A e que o espaço próprio para o valor próprio λ é a reta gerada pelo polinômio $\frac{A}{X-\lambda}$.

v) Mostre que o endomorfismo f é diagonalizavel, se e somente se, o polinômio A tem $n+1$ raizes reais e distintas.

(5) Seja T um operador linear sobre um espaço de dimensão finita V. Prove que existe um vetor α em V com a propriedade: Se f é um polinômio e $f(T)\alpha = 0$, então $f(T) = 0$.