**Universidade Federal do Paraná**
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**2° semestre 2016.**

# Álgebra Linear Avançada
## Exame de Qualificação

---

**Exercício 1**: (1 pt)
Notemos $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço de matrizes quadradas $2 \times 2$.

a) Dê um exemplo de uma matriz em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que seja diagonalizável em $\mathbb{C}$ más não diagonalizável em $\mathbb{R}$ (justifique).

b) Dê um exemplo de uma matriz em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que não seja diagonalizável nem $\mathbb{R}$ nem em $\mathbb{C}$ (justifique).

---

**Exercício 2**: (2,5 pts)
Seja $E$ um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita, notemos $\mathcal{L}(E)$ o espaço dos endomorfismos de $E$. Considera $u, v \in \mathcal{L}(E)$ dois endormorfismos diagonalizáveis que comutam, ou seja tais que:

$$u \circ v = v \circ u.$$

a) Mostre que os autoespaços de $v$ são estaveis por $u$.

b) Mostre que $u$ induz em cada autoespaço de $v$ um endomorfismo diagonalizável.

c) Deduza a existência de uma base $\mathcal{B}$ em $E$ que diagonaliza ambos $u$ e $v$.

---

**Exercício 3**: (2,5 pts)
Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $T : V \to V$ um operador linear. A *nulidade* do operador $T$ é a dimensão de seu núcleo.

a) Mostre que se $m > k \geq 1$ então $\mathrm{nul}(T^m) \geq \mathrm{nul}(T^k)$.

b) Seja $m \geq 1$. Mostre que se existe um vetor $v$ tal que $T^{m-1}v \neq 0$ mas $T^m v = 0$ então o conjunto $\{v, T(v), \ldots, T^{m-1}(v)\}$ é linearmente independente.

c) Mostre que se $\mathrm{nul}(T^{n-1}) \neq \mathrm{nul}(T^n)$ então $T$ é nilpotente, e $T^n = 0$.

**Exercício 4**: (2,5 pts)
Consideremos um espaço Euclidiano $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

a) Sejam $a_1, a_2, b_1, b_2 \in V$ e $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$. Suponhamos, que o ângulo entre $a_1$ e $a_2$ é igual ao ângulo entre $b_1$ e $b_2$. Mostrar, que existe um operador ortogonal $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1, 2$.

b) Sejam $a_1, ..., a_k$ e $b_1, ..., b_k$ dois sistemas de vetores em $V$. Mostrar, que existe um operador ortogonal $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, tal que $\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$ se, e somente se $\langle a_i, a_j\rangle = \langle b_i, b_j\rangle$ para todo $i, j$.

---

**Exercício 5**: (1,5 pts)
Seja $\varphi$ um operador autoadjounto em um espaço Hermitiano $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimensão $n$. Se os autovalores de $\varphi$ são $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$. Mostrar, que:

a) $\lambda_1 \leq \frac{\langle\varphi(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle} \leq \lambda_n$ para todos vetores $\vec{0} \neq a \in V$;

b) $\lambda_1 = \min_{|a|=1} \frac{\langle\varphi(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}, \quad \lambda_n = \max_{|a|=1} \frac{\langle\varphi(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}$.