Ministério da Educação
**Universidade Federal do Paraná - UFPR**
**Departamento de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

# Exame de Qualificação: Álgebra Linear Avançada (Agosto 2017)

Banca Examinadora:

- Prof. Edson Ribeiro Alvares
- Prof. Olivier Brahic
- Prof. Marcelo Muniz Silva Alves

Instruções:

a) A prova tem uma duração de 3 horas;
b) Cada questão escolhida vale 2,0 pontos. A prova tem um total de 10,0 pontos;
d) Justifique todas as suas respostas.

Nome do aluno:

## Questões

(1) Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ o operador linear que leva uma matriz em sua transposta.
  (a) Mostre que $T$ é diagonalizável.
  (b) Determine os autovalores de $T$, as dimensões dos autoespaços e uma base de $M_n(\mathbb{R})$ formada por autovetores de $T$.

(2) Descreva as possíveis formas canônicas de Jordan para matrizes $6 \times 6$ sobre $\mathbb{C}$ que têm polinômio característico $(x-1)^2(x-4)^4$.

(3) Seja $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
  (a) $T$ é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$
  (b) $T^{n+1} = T$.

(4) Sejam $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $F$ de dimensão $n$ e $c_1, \cdots, c_n \in F$ e $g_1, \cdots, g_n$ funcionais lineares linearmente independentes. Prove que existe um único vetor $v \in V$ tal que $g_i v = c_i$ para todo $i$.

(5) Seja $n$ um inteiro positivo e $E$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais, nulo ou de grau inferior ou igual à $n$. Seja $A$ um polinômio com coeficientes reais, unitário e de grau $n+1$. Seja $f : E \to E$ a aplicação que a todo polinômio $P$ de $E$ associa o resto da divisão euclidiana de $XP$ por $A$.
  i) Mostre que a aplicação $f$ é linear.
  ii) Qual é a matriz de $f$ na base $\{1, X, \cdots, X^n\}$ de $E$.
  iii) Calcule o polinômio característico de $f$.
  iv) Seja $\lambda$ um valor próprio de $f$. Mostre que $\lambda$ é raiz de $A$ e que o espaço próprio para o valor próprio $\lambda$ é a reta gerada pelo polinômio $\frac{A}{X-\lambda}$.

v) Mostre que o endomorfismo $f$ é diagonalizavel, se e somente se, o polinômio $A$ tem $n+1$ raizes reais e distintas.