Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Álgebra Linear Avançada

- Data: 24/08/2020
- Banca Examinadora:
  1. Profa. Maria Eugênia Martin
  2. Prof. Matheus Brito
  3. Prof. Olivier Brahic
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas mais 45 minutos para digitalização e envio à banca.
  2. Faça o exame com a câmera e o microfone ligados.
  3. Justifique todas as suas respostas.
  4. As questões são independentes uma da outra.

Exercício 1. (20 pontos) Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique as verdadeiras e dê um contraexemplo para as falsas.

a. Sejam $V = \mathbb{R}^7$ e $f : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear alternada. Se $A \in M_7(\mathbb{R})$ é a matriz de f em alguma base $\mathscr{B}$ de V então $\det(A) = 0$.

b. Todo espaço vetorial é isomorfo a seu dual.

c. Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, um operador linear tal que $T^k = \mathrm{Id}$ para algum $k > 1$ então a forma canônica de Jordan de T tem um bloco de Jordan de tamanho $k \times k$.

d. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é linear e T é não nula, então existem pelo menos 2 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^4$ que não estão em $\mathrm{Im}(T)$.

Exercício 2. (20 pontos) Seja $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(p(x)) = p(x+1)$.

a. Determine a forma de Jordan J de T.

b. Encontre uma base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = J$.

Exercício 3. (25 pontos) Sejam T e S dois operadores autoadjuntos em um espaço vetorial V de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Prove que se T e S comutam, então existe uma base ortonormal de V que diagonaliza estes dois operadores simultaneamente.

Exercício 4. (15 pontos) Mostre que existe única $\Gamma \in \mathscr{L}(V \otimes \cdots \otimes V, \Lambda^p(V))$ satisfazendo

$$\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

para todo $v_j \in V, 1 \leq j \leq p$.

Exercício 5. (20 pontos) Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n e $f_1, f_2 \in V^*$ dois funcionais lineares não nulos e tais que f_1 não é um múltiplo escalar de f_2. Mostre que:

a. A aplicação $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u,v) = \frac{f_1(u)f_2(v) + f_2(u)f_1(v)}{2}$$

é uma forma bilinear simétrica.

b. Encontre a assinatura de f.