UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Exame de Qualificação. Análise Numérica. 30/07/2012
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada

Professores: Miguel Dumett, Saulo Pomponet Oliveira e Ailín Ruiz de Zárate

NOME: ____

Instruções:

1. A prova deve ser entregue até _______.
2. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3. Cada questão vale 2 pontos. Total da prova: 10 pontos.
4. Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. Deduza o método de Newton para o cálculo de raízes de uma função f de classe C^2. Dica: considere o polinômio de Taylor de grau 1 de f em torno de $x = a$ (escolha o ponto a adequadamente).

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e $h > 0$.

   (a) Encontre o polinômio p de grau 2 que interpola de f nos pontos $x = 0$, $x = h$ e $x = 2h$.

   (b) Encontre w_i, $i = 0, 1, 2$, tais que
   $$\int_0^{2h} f(x)\,dx = w_0 f(0) + w_1 f(h) + w_2 f(2h)$$
   se f for um polinômio de grau menor ou igual a 2.

3. Dada uma matriz quadrada A com dimensões $m \times m$,

   (a) Descreva , a eliminação gaussiana (sem pivoteamento) e a fatoração de Choleski, indicando as propriedades que A precisa satisfazer em cada um destes métodos.

   (b) Deduza o número de operações realizado em cada um dos métodos do item anterior.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $P = \text{diag}(A)$ é inversível. Mostre que se o método de Jacobi
   $$Px^{(k+1)} = (P - A)x^{(k)} + b$$
   é convergente para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, e se $0 < \omega \leq 1$, então o método JOR
   $$\begin{cases} P\tilde{x} = (P - A)x^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} = \omega\tilde{x} + (1 - \omega)x^{(k)} \end{cases}$$
   também é convergente para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

5. Considere um Problema de Valor Inicial (P.V.I.): $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ com f satisfazendo uma condição de Lipschitz $|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$ em $D = [t_0 - A, t_0 + A] \times \mathbb{R}$, $L, A > 0$ e ainda $f \in C^1(D)$.

   (a) Defina ordem de precisão, consistência, estabilidade e convergência de um <u>método multipasso</u> para este problema.

   (b) Enuncie o teorema de equivalência (de Dahlquist) que relaciona os conceitos acima.

   (c) Aplique o teorema de equivalência ao método de Euler Explícito. Dica: $1 + hL \leq e^{hL}$.

BOA PROVA!