Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica
26/08/2013

Definições:

1. $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ ; \ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$, sendo a integral no sentido de Lebesgue.
2. $l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{C} \ ; \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \infty \right\}$.
3. Dada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$, $\text{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n(t), \quad (a_n) \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}$
4. $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$.
5. $\mathcal{S} = \{\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ ; \ \|\theta\|_{p,k} < \infty \ \forall \ p, k = 0, 1, \ldots\}, \quad \|\theta\|_{p,k} = \sup_{t\in\mathbb{R}} (1 + |t|)^p |\theta^{(k)}(t)|$.
6. Dadas as funções $u, v \in \mathcal{S}$, $d(u, v) = \sum_{p,k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+p}} \frac{\|u-v\|_{p,k}}{1+\|u-v\|_{p,k}}$

Questões:

1. Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert, $f \in H$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência ortonormal e $c_n = \langle f, f_n \rangle$. Dizemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é completo quando

$$\langle g, f_n \rangle = 0 \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|g\| = 0,$$

sendo $\| \cdot \|$ a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \right\| = 0 \Longleftrightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é completo.}$$

2. Considere o operador $\mathcal{Q}_{m,n} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por:

$$\mathcal{Q}_{m,n} f(t) = 2^{m/2} f(2^m t - n).$$

   (a) Se $g = \mathcal{Q}_{m,n} f$, escreva $\hat{g}$ em termos de $\hat{f}$;
   (b) Mostre que, se $f \in \mathcal{S}$ e $g = \mathcal{Q}_{m,n} f$, então $g \in \mathcal{S}$;
   (c) Sejam $\theta \in \mathcal{S}$ e $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tais que $\lim_{k\to\infty} d(\theta_k, \theta) = 0$, sendo $d(\cdot, \cdot)$ a métrica em $\mathcal{S}$. Mostre que $\lim_{k\to\infty} d(\mathcal{Q}_{m,n}\theta_k, \mathcal{Q}_{m,n}\theta) = 0$.

3. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-iat}$ e $T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ o funcional definido por $T_f(\theta) = \langle f, \theta \rangle \ \forall \ \theta \in \mathcal{S}$.

   (a) Mostre que o funcional T_f define uma distribuição temperada;
   (b) Determine a transformada de Fourier de T_f;

4. Dado $C > 0$, por que a função $q(t) = C/(1 + t^2)$ não é uma função escala ?

5. Seja $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ função-escala que define uma M.R.A. (análise de multirresolução)

$$\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \quad V_m = \text{span}\{\phi_{m,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \phi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\phi(2^m t - n).$$

e seja $\psi \in V_1$ a wavelet-mãe associada a ϕ. Sabendo que $\exists C > 0$ tal que $|\phi(t)| \leq C_1/(1+t^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostre que existe $C_2 > 0$ tal que $|\psi(t)| \leq C_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.