UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Exame de Qualificação. Análise Numérica. 01/09/2013
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada

NOME: ____

Instruções:
1. A prova deve ser entregue até _______.
2. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3. Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. (2 pontos) Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ tal que $A = (1+\omega)P - (N + \omega P)$, sendo que $P^{-1}N$ é não-singular e $P^{-1}N$ possui autovalores λ_i, $i = 1 \dots n$, $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Considere o método iterativo

$$(1+\omega)P\mathbf{x}^{(k+1)} = (N + \omega P)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k > 0. \tag{1}$$

   (a) Encontre B e $\mathbf{v}$ tais que o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}$ seja equivalente ao método (1), e mostre que a solução x do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfaz $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

   (b) Para quais valores de $\omega \in I\!R$ o método iterativo (1) converge para a solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ independentemente do vetor inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in I\!R^n$?

2. (3 pontos) Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função de classe C^4 e $h > 0$.

   (a) Escreva, em termos das funções de interpolação de Lagrange, o polinômio p de grau 2 que interpola de f nos pontos $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.

   (b) Encontre w_i, $i = 0, 1, 2$, tais que

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \tag{2}$$

   se f for um polinômio de grau menor ou igual a 2.

   (c) Generalize (2) mostrando que existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - (w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)) \right| \leq Ch^4.$$

3. (2 pontos) Considere o método linear de passos múltiplos do tipo Adams-Bashforth da forma

$$y_n - y_{n-1} = h\left(\frac{3}{2}f_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-2}\right),$$

   (a) Verifique que o método é consistente.

   (b) Verifique que o método é 0-estável.

   (c) O método é convergente? Justifique.

Continuação

4. (3 pontos) Considere a equação modelo da onda $u_t + cu_x = 0$, $c > 0$ discretizada com o método de Lax-Friedrichs,

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) - \frac{ck}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right).$$

   (a) Prove que o Erro de Truncamento Local (ETL) pode ser escrito da forma

$$L_k(x,t) = u_t + cu_x + \frac{k}{2}\left(u_{tt} - \frac{h^2}{k^2}u_{xx}\right) + O(h^2),$$

   (b) Supondo que $\frac{h}{k}$ é constante, conclua que o método é consistente de ordem um.

   (c) Verifique que o método é estável.

   (d) O método de Lax-Friedrichs para a equação considerada é convergente? Justifique.

   (e) Mostre que temos difusão numérica quando o número de Courant é menor do que 1.

BOA PROVA!