UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica e da disciplina EMA708
15/12/2014

NOME: ____

Instruções:	
1.	A prova deve ser entregue até _______.
2.	Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3.	Justifique rigorosamente cada resposta.
4.	Escolha e marque nesta folha 4 questões para a avaliação de EMA708

Questões:

1. Dado o sistema linear $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e uma norma matricial $\|\cdot\|$ induzida por uma norma vetorial $\|\cdot\|$, mostre que o erro relativo da solução do sistema perturbado

$$A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$$

é limitado pelo erro relativo do dado inicial vezes o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|$.

2. Sejam $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ e $f \in C^2([-1,1])$, e seja $\Pi_1 f$ o polinômio interpolador de f nos pontos x_0 e x_1. Mostre que existe $\xi \in [-1,1]$ tal que

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}\omega_2(x), \quad \omega_2(x) = (x+1)(x-1).$$

3. Sejam $\tilde{I}_0(f) = w_0 f(x_0)$ e $\tilde{I}(f) = \int_0^1 f(x)x^2\,dx$.

   (a) Se $x_0 = 1/2$, encontre w_0 tal que $\tilde{I}_0(1) = \tilde{I}(1)$.

   (b) Encontre x_0 and w_0 tais que $\tilde{I}_0(p) = \tilde{I}(p)$ para todo polinômio p de grau 1.

4. Seja $(V, (\cdot,\cdot))$ um espaço de Hilbert tal que $\mathcal{P}_n \subset V$ para todo $n \geq 0$, sendo $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau $\leq n$. Sejam $p_0, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_n$ polinômios ortogonais com respeito ao produto interno $(\cdot,\cdot)$ tais que $\|p_k\| := (p_k, p_k)^{1/2} = 1$, $0 \leq k \leq n$. Dado $f \in V$, encontre $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ tal que

$$\|p_n^* - f\| = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|p - f\|.$$

5. Seja P uma matriz simétrica e positiva definida, e A uma matriz positiva definida (mas não simétrica). Mostre que $P^{-1}A$ é positiva definida.

6. Seja A simétrica e positiva definida com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$, e $P = \mathrm{diag}(A)$. Considere o método iterativo

$$P\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (P - \omega A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega b \qquad (1)$$

   (a) Mostre que o método iterativo (1) é consistente para todo $\omega \in I\!R$;

   (b) Determine para quais valores de ω o método iterativo (1) é convergente.

BOA PROVA!