Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Análise em $\mathbb{R}^n$

- Data: 03/08/18
- Banca examinadora:
  1. Cleber de Medeira
  2. Fernando de Ávila
  3. Pedro Damázio
- Instruções:
  1. A prova tem duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;

Questões:

1. (20 pontos) Mostre que $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| = 1\}$ não é homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.
2. (10 pontos) Enuncie os teoremas da função inversa e da função implícita;
3. (10 pontos) Seja $a \in U$ um ponto crítico de uma função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Supondo que a matriz hessiana
$$H_f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]$$
é invertível, mostre que existe um aberto V, com $a \in V \subset U$, no qual não há outros pontos críticos de f. (Dica: note que existe uma relação entre $H_f(x)$ e a função
$$F(x) = \nabla f(x),\ x \in U.)$$
4. (10 pontos) Considere uma família de funções
$$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{a um parâmetro real} \quad \lambda,$$
de modo que $g_\lambda(x) = g(\lambda, x)$ seja de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Suponha também que g_{λ_0} possua um ponto fixo x_0. Obtenha condições que garantam a exitência e unicidade de ponto fixo, próximo de x_0, para toda g_λ, com λ próximo de λ_0.
5. (20 pontos) Como aplicação do método do Multiplicador de Lagrange, verifique que todo operador simétrico em $\mathbb{R}^n$ possui autovetores. (Dica: considere $A = [a_{ij}]$ uma matriz simétrica de ordem n e a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) =< A \cdot x, x >$.)
6. (10 pontos) Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponha que o conjunto
$$X = \{x \in A;\ f(x) \neq 0\}$$
tenha medida nula. Prove que
$$\int_A f(x)dx = 0.$$

7. (10 pontos) Sejam $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Mostre que a função $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ é integrável em $A = [a, b] \times [c, d]$ e vale

$$\int_A f(x, y)dxdy = \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)\left(\int_c^d \psi(y)dy\right).$$

8. (10 pontos) Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $X \subset U$ um conjunto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que $h(X)$ é um conjunto J-mensurável e, além disso, se f é integrável, então a composta $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável.

Boa prova!