Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Análise em $\mathbb{R}^n$

- Data: 01/03/2019
- Banca examinadora:
  1. Alexandre Kirilov
  2. Cleber de Medeira
  3. Fernando de Ávila
- Instruções:
  1. A prova tem duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;

Questões:

1. (30 pontos) Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ não vazio a $a \in \mathbb{R}^n$, defina a distância entre a e X por

$$\operatorname{dist}(a, X) = \inf\{\|a - x\|, x \in X\}$$

   (a) Mostre que $\overline{X} = \{a \in \mathbb{R}^n;\ d(a, X) = 0\}$;

   (b) Prove que a função $x \in \mathbb{R}^n \mapsto d(x, X) \in [0, \infty)$ é uniformemente contínua.

   (c) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos fechados e disjuntos. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

   é uma função contínua com imagem $f(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$. Além disso, verifique que $A = f^{-1}(\{0\})$ e $B = f^{-1}(\{1\})$.

2. (20 pontos) Seja $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ o espaços das matrizes 3×3 com entradas reais e $A_0 \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Mostre que a função determinante $\det : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é diferenciável e calcule $(\det)'_{A_0}(I)$.

3. (30 pontos) Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de classe C^1 no aberto A, é dita uma *submersão* em $x_0 \in A$ se $f'(x_0)$ é sobrejetiva (nesse caso $n \geq m$).

   (a) Se $m = n$ e f é submersão em x_0, mostre que é submersão numa vizinhança de x_0.

   (b) Suponha $f : A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$, de classe C^1 no aberto A com $f'(p_0)$ é sobrejetiva. Mostre que existe um aberto U contendo p_0 tal que $f(U)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$.
   Dicas:
   - escreva $f'(p_0) = (f'_x(p_0), f'_y(p_0))$.
   - considere $F(x, y) = (x, f(x, y))$;
   - utlize o teorema da função i******;
   - a projeção $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ ajuda a concluir que $f(U)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$.

4. (20 pontos) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável no retângulo $A \subset \mathbb{R}^n$.

   (a) Se o conjunto $X = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$ tem medida nula, mostre que

$$\int_A f(x)dx = 0;$$

   (b) Mostre que o conjunto $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in A\}$ tem medida nula.

Boa prova!