Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Equações Diferenciais Parciais

- Aluno:
- Data: 02 de agosto de 2019
- Banca examinadora:
  1. Professora Ailin Ruiz de Zarate
  2. Professor Pedro Danizete Damazio
  3. Professor Jurandir Ceccon
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.

Questões:

1. (2 pontos) Considere o problema de valor inicial dado pela Equação de Burgers invíscida,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = F(x), \end{cases}$$

onde $F \in C^1(\mathbb{R})$ e F' muda de sinal. Resolva os seguintes itens:

   (a) Escreva e resolva o sistema de equações características para os pontos da curva $\Gamma : x = s,\ t = 0,\ z = F(s)$.

   (b) Escreva a relação implícita envolvendo u e F e calcule o tempo crítico para o qual não existe mais solução $u(x,t)$ no sentido clássico.

2. (2 pontos) Seja $u(x,t)$ uma solução da equação da onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad a < x < b,\ t > 0,$$

tal que $u(a,t) = 0 = u(b,t)$ para todo $t \geq 0$ e $u \in C^2([a,b] \times (0,+\infty)) \cap C^1([a,b] \times [0,+\infty))$.

   (a) Prove que a integral de energia

$$E(t) = \int_a^b (u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2\, dx,$$

   permanece constante para todo $t \geq 0$.

(b) Prove que se existe uma solução do problema

$$\begin{cases} w \in C^2\left([a,b]\times(0,+\infty)\right)\cap C^1\left([a,b]\times[0,+\infty)\right), \\ w_{tt} - w_{xx} = F(x,t), \qquad a < x < b,\ t > 0, \\ w(x,0) = f(x),\ a \le x \le b, \\ w_t(x,0) = g(x),\ a \le x \le b, \\ w(a,t) = A(t),\ t \ge 0, \\ w(b,t) = B(t),\ t \ge 0, \end{cases}$$

onde $F \in C\left([a,b]\times(0,+\infty)\right)$, $f, g \in C\left([a,b]\right)$ e $A, B \in C\left([0,+\infty)\right)$, então dita solução é única.

3. (2 pontos) Prove o seguinte Princípio do Máximo:

Sejam $\Omega = (a,b)\times(0,T)$, $a < b$, $0 < T$, $\Gamma_1 = \{(a,t) : 0 \le t \le T\}$, $\Gamma_2 = \{(x,0) : a \le x \le b\}$, $\Gamma_3 = \{(b,t) : 0 \le t \le T\}$ e $\Gamma_4 = \{(x,T) : a < x < b\}$. Suponha que $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 em $\Omega \cup \Gamma_4$, contínua em $\overline{\Omega}$ e satisfaz $Tu \ge 0$ em $\Omega \cup \Gamma_4$, onde $Tu = u_{xx} - u_t$. Então o máximo de u ocorre em $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

4. (4 pontos) Considere o problema de condução de calor em uma barra infinita com temperatura inicial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, função contínua e limitada:

$$\begin{cases} u \in C^2\left(\mathbb{R}\times(0,+\infty)\right)\cap C\left(\mathbb{R}\times[0,+\infty)\right) \text{ limitada}, \\ u_t = u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Ache uma candidata a solução u.

(b) Escreva a candidata achada como convolução envolvendo o Núcleo do calor.

(c) Prove que o Núcleo do calor constitue uma identidade aproximada.

(d) Prove que a candidata achada é de fato solução.