Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Geometria

- Aluno:
- Data: 4 de Março, 2020
- Banca examinadora:
  1. Professor Olivier Brahic (Presidente)
  2. Professor Carlos Eduardo Durán Fernández
  3. Professor Hudson de Oliveira Lima
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.

Questões:

1. (4 pontos)
   (a) Construa no produto cartesiano $M \times N$ uma estrutura natural de variedade diferenciável que faz das projeções a cada componente submersões.
   (b) Dada uma aplicação diferenciável $F : M \to N$, denotemos por
   $$\operatorname{graf}(f) := \{(x, f(x)) \in M \times N \,|\, x \in M\}$$
   o gráfico de f. Mostre que $\operatorname{graf}(f)$ é uma subvariedade de $M \times N$.
   (c) Denotemos por $\pi_M : M \times N \to N$ a primeira projeção. Mostre que a restrição de π_M a $\operatorname{graf}(f)$ define um difeomorfismo de $\operatorname{graf}(f)$ para M.
   (d) Será que $\operatorname{graf}(f) \subset M \times N$ é uma variedade mergulhada ?

2. (3 pontos) Consideremos a variedade $M := \mathbb{R}^3 - Oz$, onde Oz denota o terceiro eixo $Oz = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{R}\}$. Sejam também X e Y os campos vetoriais em M definidos por:
   $$X := -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x},$$
   $$Y := g \cdot \partial z,$$
   onde g denota uma função suave $g : M \to \mathbb{R}^{>0}$, que independe da variável z.
   (a) Calcule o colchete $[X, Y]$.
   (b) Determine os fluxos Φ^X_t e Φ^Y_t de X e Y, respectivamente. Será que X e Y são completos ?
   (c) Mostre que $D_m := \operatorname{Vect}\{X_m, Y_m\}$, para todo $m \in M$, define uma distribuição suave $D \subset TM$ de dimensão 2, e que D é integrável.

(d) Descreva a folheação associada a D.

3. (3 pontos) Seja $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Denotemos por $\iota : S^1 \hookrightarrow M$ a inclusão, e consideremos a 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ dada por:

$$\alpha := \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}.$$

(a) Mostre que $d\alpha = 0$.

(b) Calcule a integral:

$$\int_{S^1} \iota^* \alpha,$$

onde S^1 esta munido da orientação "anti-horária".

(c) Será que existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $\alpha = df$?

(d) Consideremos agora $\mathcal{C} := \{(f(e^{i\theta}) \cos\theta, f(e^{i\theta}) \sin\theta) \,|\, \theta \in S^1\}$, onde $f : S^1 \to]0, 1[$ é uma função suave qualquer, e denotemos por $j : \mathcal{C} \hookrightarrow M$ a inclusão. Calcule a integral:

$$\int_{\mathcal{C}} j^* \alpha.$$