Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Geometria

- Aluno:
- Data: 26/08/2020
- Banca examinadora:
  1. Professor Carlos Eduardo Durán Fernández
  2. Professor Olivier Brahic
  3. Professor Diego Mano Otero
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.

Questões:

1. (2.5 pontos) Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ a função $f(X) = X^\top \cdot X$, onde $M_n(\mathbb{R})$ e $S_n(\mathbb{R})$ denotam o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ reais e o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$ reais.
   a) Mostre que a matriz identidade $I \in S_n(\mathbb{R})$ é um valor regular de f, assim mostrando que o grupo ortogonal é uma subvariedade mergulhada no espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$.
   b) Mostre que o tangente $T_I O(n)$ em $I \in O(n)$ pode ser identificado com o conjunto de matrizes antissimétricas $n \times n$.
   c) Mostre que o tangente $T_p S^{n-1}$ em $p \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ pode ser identificado com o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ perpendiculares a p.
   d) Mostre que a função $g : O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, dada por $g(X, p) = X \cdot p$ (multiplicação de matrizes, onde $p \in S^{n-1}$ é visto como uma matriz coluna), é diferenciável. Dé uma expressão algébrica para a derivada de g no ponto (I, e_1), onde e_1 é o primeiro elemento da base padrão de $\mathbb{R}^n$.

2. (2.5 pontos) Considere a função $s : S^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $s(x, y, z) = (xy, xz, yz)$. Mostre que s é uma imersão com exceção de um número finito de pontos. Quais? Mostre que s induz uma função diferenciável $\hat{s} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$, que é uma imersão com exceção de um número finito de pontos; quantos?

3. (2.5 pontos) Considere a função $h : S^3 \to \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ dada por
$$h(z_1, z_2) = \left(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z_2}\right),$$
onde consideramos S^3 como a esfera unitária em $\mathbb{C}^2$. Mostre que:
   a) A imagem de h cai dentro da esfera $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.
   b) Como função de $S^3 \to S^2$, h é diferenciável.

c) Como função de $S^3 \to S^2$, h é uma submersão.

4. (2.5 pontos) Seja M uma variedade conexa por caminhos.

   a) Suponha que $f : M \to \mathbb{R}$ satisfaz $df = 0$. Mostre que f é constante.

   b) Considere a projeção $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$. Mostre que uma 1-forma β em S^2 satisfaz $\beta = \pi^* \rho$ para alguma 1-forma em $\mathbb{R}P^2$ se, e somente se $a^*\beta = \beta$, onde $a : S^2 \to S^2$ é a aplicação antipodal $a(p) = -p$.

   c) Suponha que: toda 1-forma fechada em S^2 é exata, e o *Teorema de Borsuk-Ulam:* toda função contínua da esfera $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ admite um ponto $p \in S^n$ tal que $f(p) = f(-p)$. Mostre que toda 1-forma fechada em $\mathbb{R}P^2$ é exata.