Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Otimização

- Aluno: ______________________________
- Data: 30/07/2019
- Banca examinadora:
  1. Ademir Alves Ribeiro
  2. Elizabeth Wegner Karas
  3. Alberto Ramos
- Instruções:
  1. A prova tem duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.

Questões:

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + e^{x_2}$.

   (a) (5 pontos) Prove que f é convexa, limitada inferiormente e não possui pontos estacionários.

   (b) (10 pontos) Considere $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, com $a \neq 0$, e $d = -\nabla f(x)$. Mostre que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = f(x + td)$ tem um único minimizador global t_*, o qual satisfaz $1 < t_* < 2 + a^{-2}$.

   (c) (10 pontos) Considere a sequência $(x^k) = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$, gerada pelo método de Cauchy com busca exata, a partir do ponto $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mostre que $|a_k| < \sqrt{2f(x^0)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e que $b_k \to -\infty$.

2. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in C, \end{array} \tag{1}$$

   onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado.

   (a) (13 pontos) Prove que se $x^* \in C$ é solução local do problema (1), então

$$\text{proj}_C\big(x^* - \alpha \nabla f(x^*)\big) = x^*,$$

   para todo $\alpha \geq 0$.

   (b) (12 pontos) Suponha que f é convexa. Prove que se

$$\text{proj}_C\big(x^* - \nabla f(x^*)\big) = x^*,$$

   então x^* é solução global do problema (1).

3. (25 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se x^* é um ponto estacionário de f e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então x^* é minimizador local estrito de f.

4. Considere o problema

$$\begin{array}{rr} \text{minimizar} & 1 - x_1^2 x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq x_1^3 - x_1 \\ & x_1 \geq 0. \end{array} \tag{2}$$

   (a) (5 pontos) Faça uma representação geométrica deste problema e mostre que o conjunto viável está contido na caixa $[0,2] \times [-2,1]$. Conclua que o problema tem um minimizador global.

   (b) (5 pontos) Prove que todo ponto viável cumpre LICQ.

   (c) (5 pontos) Mostre que se $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ cumpre as condições de KKT, então $\mu_3 = 0$.

   (d) (5 pontos) Sejam $x^* \in \mathbb{R}^2$ um minimizador global do problema (2) e $\mu^* \in \mathbb{R}^3$ o multiplicador correspondente. Mostre que x_1^*, μ_1^* e μ_2^* são todos não nulos.

   (e) (5 pontos) Mostre que o minimizador global é único.

5. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e suponha que existem constantes $M \geq m > 0$, tais que $\nabla^2 f(x) - mI$ e $MI - \nabla^2 f(x)$ são semidefinidas positivas para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) (5 pontos) Mostre que existem $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x) \geq \frac{m}{2}\|x\|^2 + b^T x + c.$$

   Conclua que f possui um minimizador global e que tal ponto é único.

   (b) (5 pontos) Denotando por x^* o minimizador global de f, mostre que

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{m}{2}\|x - x^*\|^2$$

   para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   (c) (7 pontos) Seja (x^k) uma sequência gerada pelo método de Newton com passo constante $t_k = \dfrac{m}{M}$. Prove que

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{m}{2M}\nabla f(x^k)^T \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k)$$

   para todo $k \in \mathbb{N}$.

   (d) (8 pontos) Mostre que $x^k \to x^*$.