O PROBLEMA DE GELFAND E SEUS DESDOBRAMENTOS

MARCOS MONTENEGRO

Resumo

Em 1963, o matemático russo Israel Gelfand publicou um estudo sobre existência de solução clássica positiva para o problema elíptico

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda e^u & \text{em} \quad \mathbb{B}, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \mathbb{B}, \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\mathbb{B}, \end{array}\right.$$

onde λ é um parâmetro positivo e $\mathbb{B}$ denota a bola Euclideana unitária de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$.

Em seu trabalho, Gelfand mostrou a existência de um parâmetro $\lambda^* > 0$ tal que uma solução clássica positiva existe para $0 < \lambda < \lambda^*$ e inexiste para $\lambda > \lambda^*$. Este resultado se tornou pioneiro na teoria das equações elípticas com desenvolvimentos importantes até a atualidade.

A seguir, listamos algumas questões de grande interesse e determinantes nos desdobramentos que sucederam:

1. Qual o valor de λ^*?
2. Existe solução em algum sentido fraco para $\lambda > \lambda^*$?
3. O que ocorre quando $\lambda = \lambda^*$? Neste caso, existe solução clássica ou alguma outra?
4. Soluções clássicas positivas u_λ para $0 < \lambda < \lambda^*$ são soluções estacionárias estáveis para o problema parabólico

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u & = & \lambda e^u & \text{em} \quad (0, +\infty) \times \mathbb{B}, \\ u & & u_0 & \text{em} \quad \{0\} \times \mathbb{B}, \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad (0, +\infty) \times \partial\mathbb{B}, \end{array}\right.$$

5. O que ocorre para funções superlineares $f(u)$ no lugar de e^u e domínios gerais Ω no lugar da bola $\mathbb{B}$.
6. O que ocorre em contrapartidas vetoriais, isto é, para sistemas elípticos relacionados?

Estas e outras questões serão abordadas em nossa apresentação, assim como resultados mais recentes.

MSMONTENE@GMAIL.COM
Email address: `Universidade Federal de Minas Gerais`